次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄 (省略) に記入せよ．原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ および $\mathrm{B}\left(2\sqrt{3},\ 2\right)$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ とする．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ がなす角を求めよ．

(2) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ となる点を P とするとき，$|\overrightarrow{p}|$ が最小となるときの t の値と $|\overrightarrow{p}|$ の最小値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を t で表せ．

(4) t が (2) で求めた値になるとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $\triangle\mathrm{OAP}$ の何倍か．

(18 昭和大 医 1)

【答】

(1) $\dfrac{\pi}{3}$

(2) $t=-\dfrac{1}{4}$，最小値 $\sqrt{3}$

(3) $16t^2+4t$

(4) 4 倍

【解答】

(1) $\overrightarrow{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$，$\overrightarrow{b}=\left(2\sqrt{3},\ 1\right)$ のなす角を θ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{\sqrt{3}\times(2\sqrt{3})+(-1)\times 2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{6-2}{2\times 4}=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{p}|^2&=|\overrightarrow{a}|^2+2t(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+t^2|\overrightarrow{b}|^2\\&=16t^2+2t\times 4+4\\&=16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+3\end{aligned}$$

であるから，$|\overrightarrow{p}|$ は

$$\boldsymbol{t=-\frac{1}{4}}\ \text{のとき}\ \textbf{最小値}\ \boldsymbol{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- P は，点 A を通って直線 OB に平行な直線 l 上の点であり，線分 OP の長さ $|\overrightarrow{p}|$ が最小となるのは，P が，O から l へ下ろした垂線の足に一致するときである．

$$\begin{aligned}&\mathrm{OP}\perp\mathrm{OB}\iff\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}=0\\&(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0\\&4+16t=0\\&\therefore\quad t=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

このとき

$$\overrightarrow{p}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)-\frac{1}{4}\left(2\sqrt{3},\ 2\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$$

であり，求める最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

(3) 求める内積は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\\&=(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot(t\overrightarrow{b})\\&=t^2|\overrightarrow{b}|^2+t(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\\&=\boldsymbol{16t^2+4t}\end{aligned}$$ ……(答)

(4) $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき $\overrightarrow{p}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$ であり，$\overrightarrow{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$，$\overrightarrow{b}=2\left(\sqrt{3},\ 1\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}|1\times(-1)-(-\sqrt{3})\times(\sqrt{3})|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times2|\sqrt{3}\times1-(-1)\times\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

したがって，三角形 OAB の面積は三角形 OAP の面積の **4 倍**である． ……(答)

- O，A，B，P は右図のようになる．
  OB と直線 AP は平行であるから，△OAB と △OAP の面積比は 2 つの線分 OB と AP の長さの比に等しい．

$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OAP}\\&=1:|t|\\&=1:\left|-\frac{1}{4}\right|\\&=4:1\end{aligned}$$

したがって，三角形 OAB の面積は三角形 OAP の面積の 4 倍である．