平面上の 4 点 O, A, B, C が $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $|\overrightarrow{OC}| = 5$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 4$ を満たすとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値をすべて求めよ．

(2) $|\overrightarrow{AB}|$ の値をすべて求めよ．

(18 東京海洋大 生命・資源 4)

【答】

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,\ \dfrac{24}{25}$

(2) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

【解答】

(1) ベクトルのなす角をそれぞれ $\angle AOC = \alpha, \angle BOC = \beta$ とおくと

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 3, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 4$$

より

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}| \cos\alpha = 3, \quad |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}| \cos\beta = 4$$

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1,\ |\overrightarrow{OC}| = 5$ より

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{5}$$

よって，$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ である．このとき

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $\alpha + \beta$ または $\alpha - \beta$ であるから

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 0,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

それぞれに対して

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos(\alpha + \beta) = 1 \times 1 \times 0 = 0,$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos(\alpha - \beta) = 1 \times 1 \times \frac{24}{25} = \frac{24}{25}$$

よって，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値のすべては

$$\mathbf{0,\ \frac{24}{25}}$$ ……(答)

(2) $$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$$

である．(1) により

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ のとき

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 1^2 - 2 \times 0 + 1^2 = 2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{24}{25}$ のとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 1^2 - 2 \times \frac{24}{25} + 1^2 = \frac{2}{25}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値のすべては

$$\boldsymbol{\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{5}}$$ ……(答)