三角形 ABC において，辺 BC の中点を D，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を E とし，線分 AD と線分 BE の交点を F とする．さらに，AB = 8，BC = 6，AD = 7 とする．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{エオ}}$，$\triangle\mathrm{CEF} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$.

(18 法政大 文系 5)

【答】

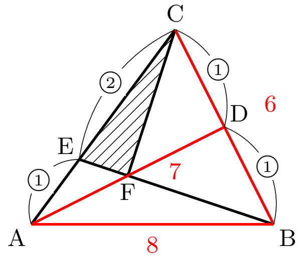
ア	イウ	エオ	カ	キ
2	13	40	2	3

【解答】

D は辺 BC の中点なので，$\mathrm{BD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \dfrac{6}{2} = 3$ であり，

△ABD において余弦定理を用いると

$$\cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AB}\times\mathrm{BD}} = \frac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3} = \frac{1}{2}$$



△ABC において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\cos B\\ &= 8^2+6^2-2\times8\times6\times\frac{1}{2}\\ &= 52\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC} = \boxed{2\sqrt{13}}$$

…… (ア～ウの答)

- 中線定理：

  $$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2)$$

  を用いてもよい．

  $$\begin{aligned}8^2+\mathrm{AC}^2 &= 2(7^2+3^2)\\ \mathrm{AC}^2 &= 2\times58-64 = 52\\ \therefore\quad \mathrm{AC} &= 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

次に，△ABC においての余弦定理は

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\cos A\\ &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

でもあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2}\\ &= \frac{8^2+(2\sqrt{13})^2-6^2}{2}\\ &= \frac{64+52-36}{2}\\ &= \boxed{40}\end{aligned}$$

…… (エオの答)

- B を始点に書き直すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= -\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})\\ &= -8\times6\times\frac{1}{2}+8^2\\ &= 40\end{aligned}$$

最後に，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}\times\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}}=1$$

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}\times\frac{1}{1}\times\frac{3}{1}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{EF}:\mathrm{FB}=1:3$$

これより点 F は線分 BE を $3:1$ に内分する．したがって

$$\triangle\mathrm{CEF}=\frac{1}{4}\triangle\mathrm{CEB}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$$

ここで

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8^2\times(2\sqrt{13})^2-40^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8^2\times(52-25)}\\ &= \frac{1}{2}\times8\times3\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから

$$\triangle\mathrm{CEF}=\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}=\boxed{2\sqrt{3}}$$

…… (カ，キの答)