t を実数とし，座標空間内に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ -1,\ -2)$，B$(1,\ 2,\ 1)$，C$(t-3,\ 1,\ t+1)$ をとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(2) t が実数全体を動くとき，△OAC の面積の最小値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積が 1 のとき，t の値を求めよ．

(18 信州大 後 経法・理・工・繊維 2)

【答】

(1) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{\sqrt{66}}{22}$

(3) $t=\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{5}{2}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ の両方に垂直な単位ベクトルを $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\ |\overrightarrow{n}|^2=1\end{cases}\iff\begin{cases}x-y-2z=0 & \cdots\cdots ①\\ x+2y+z=0 & \cdots\cdots ②\\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

である．①，②より

$$y=-x,\ z=x$$

③に代入し

$$x^2+(-x)^2+x^2=1 \qquad \therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって $\qquad \overrightarrow{n}=\pm\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$ ……(答)

(2) △OAC の面積を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}t-3\\1\\t+1\end{pmatrix}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=1^2+(-1)^2+(-2)^2=6$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=(t-3)^2+1^2+(t+1)^2=2t^2-4t+11$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\times(t-3)+(-1)\times1+(-2)\times(t+1)=-(t+6)$$

であり

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{6(2t^2-4t+11)-(t+6)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{11t^2-36t+30} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{11\left(t-\frac{18}{11}\right)^2+\frac{6}{11}} \end{aligned}$$

よって，S は $t=\dfrac{18}{11}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{6}{11}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{66}}{22}}$ をとる．　……(答)

(3) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線の足を H とすると，四面体 OABC の体積が 1 であるから

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{CH}=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

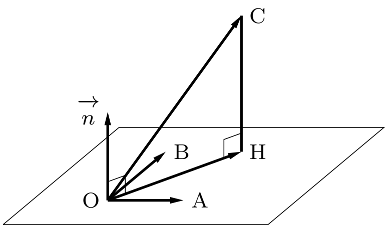
である．

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\{1^2+(-1)^2+(-2)^2\}(1^2+2^2+1^2)-(1-2-2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6\times6-(-3)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

より

$$④ \iff \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\mathrm{CH}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{CH}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cdots\cdots ④'$$



$\overrightarrow{n}$ は平面 OAB に垂直なベクトルより

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{n}$$

と表すことはできる．s は実数である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{n}=0$$

$|\overrightarrow{n}|=1$ より

$$\begin{aligned} s &= -\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{n}=-\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left\{\begin{pmatrix}t-3\\1\\t+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \\ &= \mp\frac{\sqrt{3}}{3}\{(t-3)-1+(t+1)\} \\ &= \mp\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-3) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|s\overrightarrow{n}|=|s|$ より

$$\begin{aligned} ④' &\iff \left|\mp\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-3)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &\iff 2t-3=\pm2 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}}$$　……(答)