座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し，

$$\overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく．ただし，O は原点，s と t は実数とする．

(1) $|\overrightarrow{p}|$, $|\overrightarrow{q}|$ と内積 $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}$ を s, t で表せ．

(2) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ．

(3) s と t が実数を動くとき，$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}|$ の最小値を求めよ．

(18 北海道大 理 1)

【答】

(1) $|\overrightarrow{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}$, $|\overrightarrow{q}|=\sqrt{2t^2-2t+1}$, $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=-t$

(2) $s=\dfrac{1}{2}$

(3) $\sqrt{2}$

【解答】

4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{d}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=1,\ |\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{d}|=\sqrt{2},\\
&\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=0,\\
&\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}=-1
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(1) 与えられた条件により

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{p}|^2&=|(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|^2\\
&=(1-t)^2|\overrightarrow{a}|^2+2(1-t)t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2\\
&=(1-t)^2+t^2\\
&=2t^2-2t+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{q}|^2&=|(1-s)\overrightarrow{c}+s\overrightarrow{d}|^2\\
&=(1-s)^2|\overrightarrow{c}|^2+2(1-s)s\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}+s^2|\overrightarrow{d}|^2\\
&=2(1-s)^2+2s^2\\
&=4s^2-4s+2
\end{aligned}$$

であるから

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}| = \sqrt{\boldsymbol{2t^2 - 2t + 1}}, \quad |\overrightarrow{\boldsymbol{q}}| = \sqrt{\boldsymbol{4s^2 - 4s + 2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} &= \{(1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}\}\cdot\{(1-s)\overrightarrow{c} + s\overrightarrow{d}\}\\ &= (1-t)(1-s)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + (1-t)s\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} + t(1-s)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + ts\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\\ &= -t(1-s) - ts\\ &= \boldsymbol{-t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，(1) の結果より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{p}| &= \sqrt{2\times\frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\ |\overrightarrow{q}| &= \sqrt{4s^2 - 4s + 2},\\ \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となる条件は

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|}$$

すなわち

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4s^2 - 4s + 2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成立することである．$4s^2 - 4s + 2 = (2s-1)^2 + 1 (\neq 0)$ であるから

$$\begin{aligned}&① \iff -\frac{1}{2}\sqrt{(2s-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}\\ &\therefore \quad (2s-1)^2 + 1 = 1\\ &\therefore \quad \boldsymbol{s = \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3) (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|^2 &= |\overrightarrow{p}|^2 - 2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2\\ &= (2t^2 - 2t + 1) + 2t + (4s^2 - 4s + 2)\\ &= 2t^2 + 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\end{aligned}$$

t と s は独立に実数全体を動くので，$t = 0$ かつ $s = \dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|^2$ すなわち $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|$ も最小となる．最小値は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ である． $\cdots\cdots(\text{答})$