四面体 OABC において，三角形 OBA と三角形 OCA は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるとし，$\angle\mathrm{BOC} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi\right)$ とする．さらに $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 3 点 A，B，C の定める平面 ABC と，点 O を通り平面 ABC に垂直な直線の交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ はある実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c}$$

と表せることを示しなさい．

(2) (1) の s に対し，$\cos\theta$ を s の式で表しなさい．また，s の動く範囲を求めなさい．

(3) $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の大きさと四面体 OABC の体積 V を求めなさい．

(18 首都大学東京 後 理・環境・デザ 4)

【答】

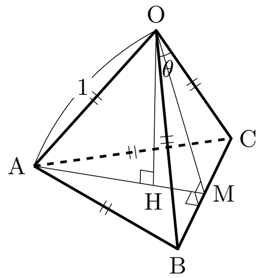
(1) 略

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{s} - 1$，$\dfrac{1}{2} < s < 2$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$，$V = \dfrac{1}{8}$

【解答】

(1) 辺 BC の中点を M とすると，OB = OC = 1, AB = AC = 1 により OM ⊥ BC, AM ⊥ BC であるから，O から直線 AM に下ろした垂線の足を G とすると，OG ⊥ (平面 ABC) となる (三垂線の定理)．すなわち，G は H と一致する．



H は直線 AM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ はある実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\ &= (1-s)\vec{a} + s\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる． …… (証明終わり)

(2) OH は平面 ABC と垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\left\{(1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c}\right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．三角形 OBA と三角形 OCA は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

である．また，$\angle\mathrm{BOC} = \theta$ より

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \times 1 \times \cos\theta = \cos\theta$$

であり，①は

$$(1-s)\left(\frac{1}{2}-1\right) + \frac{s}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{s}{2}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-2(1-s) + s + s(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$s(1+\cos\theta) = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{s} - 1}$$ ……(答)

また，$0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$ により

$$-\frac{1}{2} < \cos\theta < 1$$

$$\frac{1}{2} < 1 + \cos\theta < 2$$

であるから $s = \dfrac{1}{\cos\theta + 1}$ の動く範囲は

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} < s < 2}$$ ……(答)

である．

(3) $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，②より

$$s = \frac{4}{5}$$

であり，このとき (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

となる．したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{5}|\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}|$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 2\left(2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}$$ ……(答)

$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{OBC}$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 \times 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{8}$$

であるから，四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times S \times |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$ ……(答)