a，b を実数，i を虚数単位とする 3 次方程式 $x^3 - x^2 - \dfrac{3}{4}x + a = 0$ が $x = 2$ と $x = b + i$ を解にもつとき，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(19 京都産大 生命科学・経営など 1(2))

【答】

イ	ウ
$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$x = 2$ は ① の解であるから

$$2^3 - 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 + a = 0$$

$$\therefore \quad a = \boldsymbol{-\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

このとき，① は

$$x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0$$

$$(x-2)\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = 2,\ -\frac{1}{2} \pm i$$

$b + i$ は $x^2 + x + \dfrac{5}{4} = 0$ の解であり，b は実数であるから

$$b = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 解と係数の関係を用いてもよい．
  ① は実数を係数とする 3 次方程式であり，$x = b + i$ (b は実数) が解であるとき，$x = b - i$ も解である．$x = 2$ が解であることもあわせると

$$\begin{cases} 2 + (b+i) + (b-i) = 1 \\ 2(b+i)(b-i) = -a \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = -1 \\ a = -2(b^2+1) \end{cases}$$

$$\therefore \quad b = -\frac{1}{2}, \quad a = -\frac{5}{2}$$