$a,\ b,\ c,\ d$ を有理数とする．4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が $x=\sqrt{2}+i$ を解にもつとき，$a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(19 富山大 人間発達科・経済 1(3))

【答】 $a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$

【解答】

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

とする．実数係数の方程式 $f(x)=0$ が虚数解 $\alpha=\sqrt{2}+i$ をもつならば，$\overline{\alpha}=\sqrt{2}-i$ も解であり，$f(x)$ は

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})&=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\cdot\overline{\alpha}\\&=x^2-2\sqrt{2}x+3\end{aligned}$$

を因数にもつ．x^4 の係数と定数項に着目すると，実数 p を用いて

$$f(x)=(x^2-2\sqrt{2}x+3)\left(x^2+px+\frac{d}{3}\right)$$

とおくことができる．右辺を展開すると

$$f(x)=x^4+(p-2\sqrt{2})x^3+\left(3-2\sqrt{2}p+\frac{d}{3}\right)x^2+\left(3p-\frac{2\sqrt{2}}{3}d\right)x+d$$

両辺の係数比較すると

$$\begin{cases}a=p-2\sqrt{2}\\b=3-2\sqrt{2}p+\dfrac{d}{3}\\c=3p-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}d\end{cases}\iff\begin{cases}p=a+2\sqrt{2}\\b=3-2\sqrt{2}(a+2\sqrt{2})+\dfrac{d}{3}\\c=3(a+2\sqrt{2})-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}d\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}p=a+2\sqrt{2}\\b-\dfrac{d}{3}+5+2a\sqrt{2}=0\\3a-c+\left(6-\dfrac{2}{3}d\right)\sqrt{2}=0\end{cases}$$

$a,\ b,\ c,\ d$ は有理数であるから

$$\begin{cases}b-\dfrac{d}{3}+5=0\ \text{かつ}\ 2a=0\\3a-c=0\ \text{かつ}\ 6-\dfrac{2}{3}d=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=0,\quad c=0,\quad d=9,\quad b=-2}$$ ……(答)