$a,\ b$ を実数の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+(a^2-1)=0$ が実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+(a^2-1)=0$ が実数解をもつようなすべての a に対して，2 次方程式 $x^2+ax+(ab-1)=0$ は必ず実数解をもつとする．このとき，b の値の範囲を求めよ．

(19 島根大 教育・生資・人科 1)

【答】

(1) $-1 \leqq a \leqq \dfrac{5}{3}$

(2) $-\dfrac{5}{4} \leqq b \leqq \dfrac{61}{60}$

【解答】

(1) $$x^2+(a+1)x+(a^2-1)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

① の判別式を D_1 とすると，① が実数解をもつ条件は $D \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned} D_1 &= (a+1)^2-4(a^2-1) \\ &= -3a^2+2a+5 \\ &= -(a+1)(3a-5) \end{aligned}$$

であるから，求める a の値の範囲は

$$(a+1)(3a-5) \leqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq \frac{5}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $$x^2+ax+(ab-1)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

② の判別式を D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_2 &= a^2-4(ab-1) \\ &= a^2-4ab+4 \end{aligned}$$

$f(a)=a^2-4ab+4=(a-2b)^2-4b^2+4$ とおく．

①が実数解をもつようなすべての a に対して，②が必ず実数解をもつ条件は,「(1) の範囲 $-1 \leqq a \leqq \dfrac{5}{3}$ において，つねに $f(a) \geqq 0$ が成り立つ $\cdots\cdots$ $(*)$」ことである．

(i) $2b<-1$ $\left(つまり\ b<-\dfrac{1}{2}\right)$ のとき；

$$(*) \iff f(-1) \geqq 0$$

$$\therefore \quad 4b+5 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -\frac{5}{4} \leqq b < -\frac{1}{2}$$

(ii) $-1 \leqq 2b \leqq \dfrac{5}{3}$ $\left(つまり\ -\dfrac{1}{2} \leqq b \leqq \dfrac{5}{6}\right)$ のとき；

$$(*) \iff f(2b) \geqq 0$$

$$\therefore \quad 4(1-b^2) \geqq 0$$

これは $-\dfrac{1}{2} \leqq b \leqq \dfrac{5}{6}$ においてはつねに成り立つ．

(iii) $\dfrac{5}{3} < 2b \left(つまり\ \dfrac{5}{6} < b\right)$ のとき；

$$(*) \iff f\left(\frac{5}{3}\right) \geqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{61}{9} - \frac{20}{3}b \geqq 0 \qquad \therefore\quad \frac{5}{6} < b \leqq \frac{61}{60}$$

(i)〜(iii) より，求める b の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{5}{4} \leqq b \leqq \frac{61}{60}}$$ ……(答)