次の問いに答えなさい.

(i) $x^4-2x^2-8x-3=(x^2+a)^2+b(x+c)^2$ が恒等式となるような整数 $a,\ b,\ c$ を求めなさい.

(ii) 方程式 $x^4-2x^2-8x-3=0$ を複素数の範囲で解きなさい.

(19 福島大 人文社会 5(2))

【答】

(i) $(a,\ b,\ c)=(1,\ -4,\ 1)$

(ii) $x=1\pm\sqrt{2},\ -1\pm\sqrt{2}i$

【解答】

(i)
$$x^4-2x^2-8x-3=(x^2+a)^2+b(x+c)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

① の右辺は

$$(x^2+a)^2+b(x+c)^2=x^4+(2a+b)x^2+2bcx+a^2+bc^2$$

となるから，① が恒等式となるための条件は

$$\begin{cases}2a+b=-2\\2bc=-8\\a^2+bc^2=-3\end{cases} \iff \begin{cases}a=-\dfrac{b}{2}-1\\c=-\dfrac{4}{b}\\\left(-\dfrac{b}{2}-1\right)^2+b\left(-\dfrac{4}{b}\right)^2=-3\end{cases}$$

第 3 式を解くと

$$\left(\frac{b^2}{4}+b+1\right)+\frac{16}{b}=-3$$
$$\frac{b^3+4b^2+16b+64}{4b}=0$$
$$\frac{(b+4)(b^2+16)}{4b}=0$$

b は整数であるから　$b=-4$

このとき　$a=1,\ c=1$　であり，これらは $a,\ c$ が整数という条件を満たす.

よって　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(1,\ -4,\ 1)}$ ……(答)

(ii)
$$x^4-2x^2-8x-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

(i) の結果から，② の左辺は

$$\begin{aligned}&x^4-2x^2-8x-3\\=&(x^2+1)^2-4(x+1)^2\\=&(x^2+1)^2-\{2(x+1)\}^2\\=&\{x^2+1-2(x+1)\}\{x^2+1+2(x+1)\}\\=&(x^2-2x-1)(x^2+2x+3)\end{aligned}$$

となる．よって，② の解は

$$\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2},\ -1\pm\sqrt{2}i} \quad \cdots\cdots(答)$$

- 4 次式を平方の差に分解して因数分解するというフェラーリの解法が誘導されています.