不等式 $\sqrt{x^2+2x-3} < 2x+6$ を解け.

(19 東京都市大 工・知識工 1(1))

【答】 $x \geqq 1$

【解答】

$$\sqrt{x^2+2x-3} < 2x+6 \qquad \cdots\cdots ①$$

① を変形すると

$$① \iff \begin{cases} x^2+2x-3 < (2x+6)^2 \\ x^2+2x-3 \geqq 0 \\ 2x+6 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2+22x+39 > 0 \\ x^2+2x-3 \geqq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+3)(3x+13) > 0 \\ (x+3)(x-1) \geqq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+13 > 0 \\ x-1 \geqq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\boldsymbol{x \geqq 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

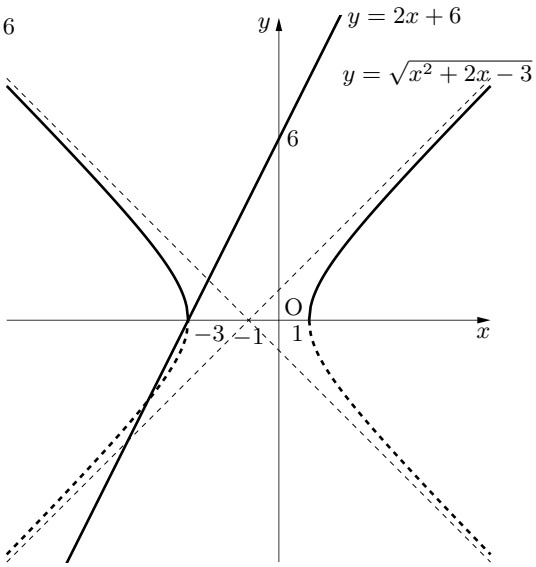
- $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ のグラフと $y=2x+6$ のグラフの位置関係を調べる.

$$y=\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\iff \begin{cases} y^2=(x+1)^2-4 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

より，それぞれのグラフは右図となるから，与えられた不等式の解は

$$x \geqq 1$$

である.