正の定数 a, b について，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqq \sqrt{ab}$$

(19 青森公立大 1(3))

【答】 略

- 大学からのコメント

  第 1 問の問題 3 は，出題範囲を一部超えることが判明したため，受験者全員を正解として扱い得点を与えました．あわせてこの変更によって不利になる受験者がいないことを確認しました．

- 青森公立大学の個別 (2 次) 試験 (数学) の出題範囲は数学 I・数学 A となっています．

【解答】

右辺と左辺の差をとると

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{b+a} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b)-2(\sqrt{ab})^2}{a+b} \quad (\because\ ab>0) \\
&= \frac{\sqrt{ab}\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}\}}{a+b} \quad (\because\ a>0,\ b>0) \\
&= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

であり，不等式

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqq \sqrt{ab}$$

が成り立つ．等号は $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，すなわち $a=b$ のとき成り立つ． …… (証明終わり)

- 正の定数 a, b について (相加平均) $\geqq$ (相乗平均)，すなわち

  $$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \text{ (等号は } a=b \text{ のとき成り立つ) (数学 II)}$$

  を認めるなら，辺々に $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}(>0)$ を掛けることにより

  $$\sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b} \qquad \therefore \quad \sqrt{ab} \geqq \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$$

  を得る．等号は $a=b$ のとき成り立つ．

- あるいは，正の数 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ について相加平均・相乗平均の関係を用いると

  $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

  辺々の逆数をとると

  $$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqq \sqrt{ab}$$

  を得る．等号は $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$ すなわち $a=b$ のとき成り立つ．