次の問いに答えよ．

(1) x についての不等式 $x^2-(a+5)x+4(a+1)<0$ を解け．ただし，a を定数とする．

(2) 次の連立不等式を満たす x の値の範囲に整数がちょうど 2 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$\begin{cases} x^2-(a+5)x+4(a+1)<0 \\ 2x^2-5x-3>0 \end{cases}$$

(19 青森公立大 2)

【答】

(1) $\begin{cases} 4<x<a+1 & (a>3 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (a=3 \text{ のとき}) \\ a+1<x<4 & (a<3 \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $-4 \leqq a < -3,\ 5 < a \leqq 6$

【解答】

(1)
$$x^2-(a+5)x+4(a+1)<0$$
$$(x-4)\{x-(a+1)\}<0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$a+1$ と 4 の大小で場合分けする．

(i) $a+1>4$ $(a>3)$ のとき
①の解は　$4<x<a+1$ である．

(ii) $a+1=4$ $(a=3)$ のとき
① $\iff$ $(x-4)^2<0$
これを満たす実数 x は存在しない．

(iii) $a+1<4$ $(a<3)$ のとき
①の解は　$a+1<x<4$ である．

以上より，① の解は

$$\begin{cases} \boldsymbol{4<x<a+1} & \boldsymbol{(a>3} \text{ のとき}\boldsymbol{)} \\ \text{解なし} & \boldsymbol{(a=3} \text{ のとき}\boldsymbol{)} \\ \boldsymbol{a+1<x<4} & \boldsymbol{(a<3} \text{ のとき}\boldsymbol{)} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$2x^2-5x-3>0$$
$$(2x+1)(x-3)>0$$
$$\therefore \quad x<-\frac{1}{2},\ 3<x \qquad \cdots\cdots ②$$

「①かつ ② を満たす x の値の範囲に整数がちょうど 2 つ存在する」…… $(*)$ ためには，a が (1) の (i) または (ii) であることが必要である．

(i) $a>3$ のとき，①の解は $4<x<a+1$ であり，② とあわせると 2 つの整数解は $x=5,\ 6$ である．よって，$(*)$ を満たす条件は

$$6<a+1 \leqq 7 \qquad \therefore \quad 5<a \leqq 6$$

である．

(iii) $a < 3$ のとき，①の解は $a+1 < x < 4$ であり，② とあわせると 2 つの整数解は $x = -1,\ -2$ である．よって，$(*)$ を満たす条件は

$$-3 \leqq a+1 < -2 \qquad \therefore \quad -4 \leqq a < -3$$

である．

以上から，a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-4 \leqq a < -3,\ 5 < a \leqq 6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．