a は実数とし，b は正の定数とする．x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ．さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ．

(19 京都大 文 2)

【答】 $m=\begin{cases}-(a+b)^2 & (a \leqq -b \text{ のとき}) \\ 0 & (-b \leqq a \leqq b \text{ のとき}) \\ -(a-b)^2 & (b \leqq a \text{ のとき})\end{cases}$，図は略

【解答】

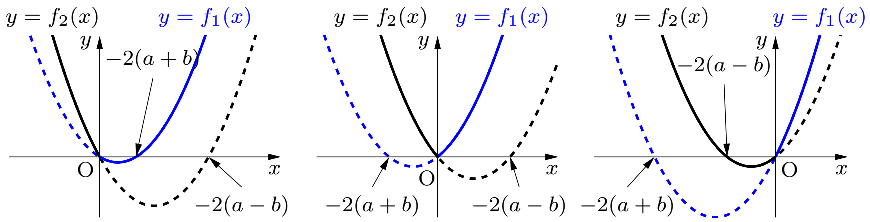
絶対値をはずすと

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2(ax+b|x|) \\ &= \begin{cases} x^2+2(a+b)x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ x^2+2(a-b)x & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

である．ここで $f_1(x)=x^2+2(a+b)x$，$f_2(x)=x^2+2(a-b)x$ とおくと

$$f_1(x)=\{x+(a+b)\}^2-(a+b)^2,$$
$$f_2(x)=\{x+(a-b)\}^2-(a-b)^2$$

であり，軸の方程式はそれぞれ $x=-a-b$，$x=-a+b$ である．$f_1(0)=f_2(0)=0$ であること，および b は正の定数より $-a-b<-a+b$ であることに注意する．



(i) $0 \leqq -a-b$，すなわち $a \leqq -b$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上図 (i) の太線部分なので

$$m=f_1(-a-b)=-(a+b)^2$$

(ii) $-a-b \leqq 0 \leqq -a+b$，すなわち $-b \leqq a \leqq b$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上図 (ii) の太線部分なので

$$m=f_1(0)=f_2(0)=0$$

(iii) $-a+b \leqq 0$，すなわち $b \leqq a$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上図 (iii) の太線部分なので

$$m=f_2(-a+b)=-(a-b)^2$$

以上，まとめると

$$\boldsymbol{m=\begin{cases}-(a+b)^2 & (a \leqq -b \text{ のとき}) \\ 0 & (-b \leqq a \leqq b \text{ のとき}) \\ -(a-b)^2 & (b \leqq a \text{ のとき})\end{cases}}$$

であり，m のグラフは右図となる．　　　　……(答)