次の関数のグラフに関する以下の問いに答えよ．ただし，m は実数とする．

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときのグラフの概形をかけ．
(2) グラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

(19 千葉大 2)

【答】

(1) 略

(2)

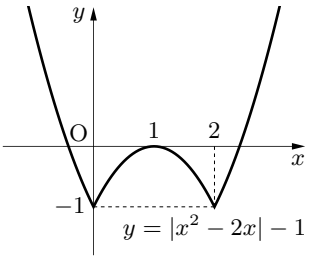
m	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
個数	0	1	2	3	4

【解答】

$$y = |x^2 - 2mx| - m$$

(1) $m = 1$ のときの関数の絶対値をはずすと

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 2x| - 1 \\ &= \begin{cases} (x^2 - 2x) - 1 & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 - 2x) - 1 & (0 < x < 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x(x-2) - 1 & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x-1)^2 & (0 < x < 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$



であり，グラフは **右図** のようになる．　……(答)

(2) 絶対値をはずすと

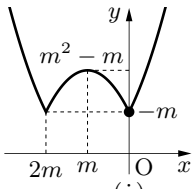
$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} (x^2 - 2mx) - m & (x \leqq 0,\ 2m \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 - 2mx) - m & (0 < x < 2m \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x(x-2m) - m & (x \leqq 0,\ 2m \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x-m)^2 + m^2 - m & (0 < x < 2m \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x) = |x^2 - 2mx| - m$ とおき，$f(0)(= f(2m)) = -m$ と $f(m) = m(m-1)$ の符号で場合分けしながら，グラフと x 軸の共有点を求める．

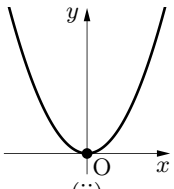
(i) $f(0) > 0$，すなわち $m < 0$ のとき
すべての x について $f(x) > 0$ であり，グラフと x 軸の共有点の個数は 0 個である．

(ii) $f(0) = 0$，すなわち $m = 0$ のとき
$f(x) = x^2$ であり，グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である．

(iii) $f(0) < 0$，すなわち $m > 0$ のとき
さらに，$f(m)$ の符号もあわせて場合分けする．

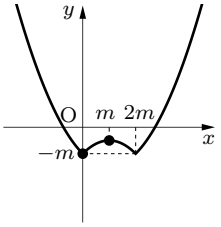


(i)

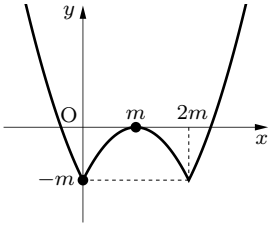


(ii)

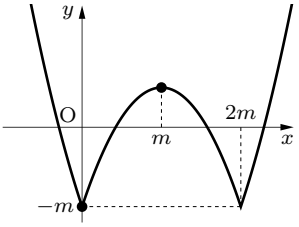
(ア) $f(m) < 0$，すなわち $0 < m < 1$ のとき，グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である．
(イ) $f(m) = 0$，すなわち $m = 1$ のとき，グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である．
(ウ) $f(m) > 0$，すなわち $m > 1$ のとき，グラフと x 軸の共有点の個数は 4 個である．



(ア)



(イ)



(ウ)

以上より，求める共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{m<0} \text{ のとき} & \textbf{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{m=0} \text{ のとき} & \textbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{0<m<1} \text{ のとき} & \textbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{m=1} \text{ のとき} & \textbf{3} \text{ 個} \\ \boldsymbol{m>1} \text{ のとき} & \textbf{4} \text{ 個} \end{cases}$$

……(答)

である．