$b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^2+bx+c$ とします．また，$g(x)$ を

$$\begin{cases} x \leqq -1 \text{ のとき}, & g(x)=-1, \\ x > -1 \text{ のとき}, & g(x)=x \end{cases}$$

と定めます．$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で接するとき，b と c の値を求めなさい．

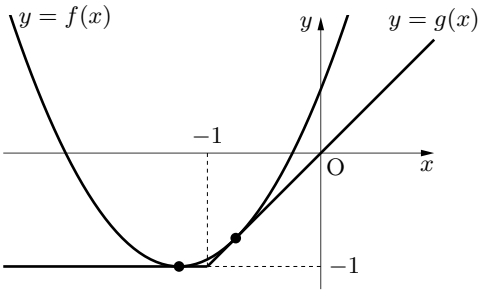
(19 横浜市大医 1(4))

【答】 $b=\dfrac{5}{2},\quad c=\dfrac{9}{16}$

【解答】

$$f(x)=x^2+bx+c$$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x \leqq -1 \text{ のとき}) \\ x & (x > -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で接するとき，接点は直線 $x=-1$ の左側と右側に 1 つずつある．

$x \leqq -1$ において，$y=f(x)$ と $y=-1$ が接する条件は

$$x^2+bx+c=-1$$
$$x^2+bx+c+1=0$$

が $x \leqq -1$ の範囲で重解をもつことである．

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2} \leqq -1 \\ b^2-4(c+1)=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (*) \begin{cases} b \geqq 2 \\ c=\dfrac{b^2}{4}-1 \end{cases}$$

$x > -1$ において，$y=f(x)$ と $y=x$ が接する条件は

$$x^2+bx+c=x$$
$$x^2+(b-1)x+c=0$$

が $x > -1$ の範囲で重解をもつことである．

$$\begin{cases} -\dfrac{b-1}{2} > -1 \\ (b-1)^2-4c=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad (**) \begin{cases} b < 3 \\ c=\dfrac{(b-1)^2}{4} \end{cases}$$

したがって

$$\text{「}(*) \text{ かつ } (**)\text{」} \iff \begin{cases} 2 \leqq b < 3 & \cdots\cdots ① \\ c=\dfrac{b^2}{4}-1 & \cdots\cdots ② \\ \dfrac{b^2}{4}-1=\dfrac{(b-1)^2}{4} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③ より

$$b^2-4=(b-1)^2$$
$$-4=-2b+1 \qquad \therefore \quad b=\frac{5}{2}$$

これは ① を満たす．また，② より

$$c = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

である．以上より

$$\boldsymbol{b = \frac{5}{2},\quad c = \frac{9}{16}}$$ ……(答)

である．