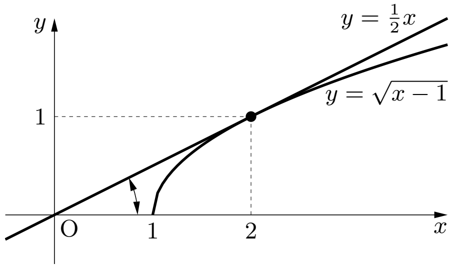
$y=\sqrt{x-1}$ のグラフと $y=ax$ のグラフが異なる 2 つの共有点をもつための定数 a の条件を求めよ.

(19 電気通信大 後 1I(1))

【答】 $0<a<\dfrac{1}{2}$

【解答】



$y=\sqrt{x-1}$ のグラフと $y=ax$ のグラフが異なる 2 つの共有点をもつ条件は

$$\sqrt{x-1}=ax \qquad \cdots\cdots ①$$

が $x \geqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつことである.

$a>0$ が必要であり, $y=ax$ のグラフが $y=\sqrt{x-1}$ のグラフと接するのは, ① より

$$x-1=a^2x^2$$
$$\therefore \quad a^2x^2-x+1=0$$

が重解をもつときであり

$$1^2-4a^2=0 \qquad \therefore \quad a=\pm\frac{1}{2}$$

である. a が直線 $y=ax$ の傾きであることに注意すると, 上のグラフより, 求める a の条件は

$$\boldsymbol{0<a<\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- 曲線 $y=\sqrt{x-1}$ 上の点 $(t,\ \sqrt{t-1})$ における接線

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)+\sqrt{t-1}$$

 が原点を通るとき t の値は $t=2$ である. このときの接線の傾きとして $a=\dfrac{1}{2}$ を得る.

- 無理関数のグラフを頼らずに, 方程式 ① が $x \geqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための a の条件を求める.

$$① \iff \begin{cases} x-1=a^2x^2 \\ ax \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2x^2-x+1=0 & \cdots\cdots ㋐ \\ ax \geqq 0 & \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$$

 である. ㋐ が $x \geqq 1$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} a^2 \neq 0 \quad (\because\ 2\text{ 次方程式である}) \\ \text{判別式}: 1-4a^2>0 \\ \text{軸の位置}: \dfrac{1}{2a^2}>1 \\ \text{端点の符号}: a^2-1+1>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad 0<a^2<\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad 0<a<\frac{1}{2}$$

 である. このとき $x \geqq 1$ であり, ㋑ も成り立つ. よって, 求める条件は

$$0<a<\frac{1}{2}$$

 である.