次の問いに答えよ．

(1) 2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ．

(2) n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ．

(19 信州大 理・医 6)

【答】

(1) $n=2k \quad$ (k は正の整数)

(2) $n=6k+1,\ 6k+2,\ 6k+4 \quad$ (k は 0 以上の整数)

【解答】

以下では 3 を法とする合同式を考える．

(1) 自然数 n に対し

$$2^n-1\equiv(-1)^n-1\equiv\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ -2 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$$

であるから，2^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は

$$\boldsymbol{n=2k \quad (k\text{ は正の整数})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) n を 3 で割った余りで分類する．

(i) $n\equiv0$ のとき，$\quad n^n-1\equiv0-1=-1$

(ii) $n\equiv1$ のとき，$\quad n^n-1\equiv1-1=0$

(iii) $n\equiv2$ のとき，$n^n\equiv2^n$ であり，(1) で調べたように

$$n^n-1\equiv2^n-1\equiv\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ -2 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$$

である．$n\equiv2$ で，かつ偶数となる自然数 n が求めるものである．この n は

$$\begin{cases}n=3l+2 & (l\text{ は 0 以上の整数})\\ n=2m & (m\text{ は 1 以上の整数})\end{cases}$$

と表すことができる．連立すると $2m=3l+2$ であり

$$2m-3l=2$$
$$2\cdot1-3\cdot0=2$$

辺々の差をとると

$$2(m-1)-3l=0 \qquad \therefore\quad 2(m-1)=3l$$

2 と 3 は互いに素であるから

$$\begin{cases}m-1=3k\\ l=2k\end{cases} \quad (k\text{ は 0 以上の整数})$$

$$\therefore\quad n=3\cdot2k+2=6k+2 \quad (k\text{ は 0 以上の整数})$$

以上 (i)，(ii)，(iii) より，n^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，(ii) の「3 で割って 1 余る」もの，または (iii) の「6 で割って 2 余る」ものであり

$$\boldsymbol{n=6k+1,\ 6k+2,\ 6k+4 \quad (k\text{ は 0 以上の整数})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．