

整数 a に対して、 a を 13 で割った余りを $r(a)$ ($0 \leq r(a) \leq 12$) で表すことにする.

- (1) 整数 a, b に対して、 $r(ab) = r(r(a)r(b))$ であることを示せ.
- (2) $r(2^3)$, $r(2^6)$, $r(2^{12})$ を求めよ.
- (3) $r(2^{2019})$ を求めよ.
- (4) n が 0 以上の整数の値をすべて動くとき、 $r(2^n)$ は 1 以上 12 以下のすべての整数の値をとることを示せ.

(19 大阪府大 後 生命環境)

【答】

- (1) 略
- (2) 順に, 8, 12, 1
- (3) 8
- (4) 略

【解答】

- (1) a, b を 13 で割った商をそれぞれ $q(a)$, $q(b)$ とすると

$$a = 13q(a) + r(a), \quad b = 13q(b) + r(b)$$

であるから

$$\begin{aligned} ab &= \{13q(a) + r(a)\}\{13q(b) + r(b)\} \\ &= 13\{13q(a)q(b) + q(a)r(b) + q(b)r(a)\} + r(a)r(b) \end{aligned}$$

である. よって、 ab を 13 で割った余りは、 $r(a)r(b)$ を 13 で割った余りに等しい.

すなわち、 $r(ab) = r(r(a)r(b))$ である. ……(証明終わり)

- (2) $2^3 = 8$ であるから

$$r(2^3) = \mathbf{8} \quad \text{……(答)}$$

$2^6 = 8 \cdot 8 = 64 = 13 \cdot 4 + 12$ であるから

$$r(2^6) = \mathbf{12} \quad \text{……(答)}$$

最後に、(1) を用いると

$$r(2^{12}) = r(2^6 \cdot 2^6) = r(r(2^6)r(2^6)) = r(12 \cdot 12) = r(144)$$

であり、 $144 = 13 \cdot 11 + 1$ であるから

$$r(2^{12}) = \mathbf{1} \quad \text{……(答)}$$

- (3) $2019 = 12 \cdot 168 + 3$ であるから、(1) より

$$r(2^{2019}) = r(2^{12 \cdot 168} \cdot 2^3) = r(r(2^{12 \cdot 168})r(2^3)) = r(r(2^{12 \cdot 168}) \cdot 8)$$

(1) の b を a として、(1) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} r(a^n) &= r(a^{n-1}a) = r(r(a^{n-1})r(a)) \\ &= r(r(a^{n-2})r(a)r(a)) \\ &= \dots \\ &= r(\underbrace{r(a) \cdot \dots \cdot r(a)}_{n \text{ 個}}) \\ &= r((r(a))^n) \end{aligned}$$

であるから

$$r(2^{12 \cdot 168}) = r((2^{12})^{168}) = r((r(2^{12}))^{168}) = r(1^{168}) = 1 \quad (\because (2))$$

よって

$$r(2^{2019}) = r(1 \cdot 8) = 8 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) n が 0 以上の整数を動くときの $r(2^n)$ の値を順次調べると

$$r(2^0) = 1,$$

$$r(2^1) = 2,$$

$$r(2^2) = 4,$$

$$r(2^3) = 8,$$

$$r(2^4) = r(16) = 3,$$

$$r(2^5) = r(2^4 \cdot 2) = r(3 \cdot 2) = 6,$$

$$r(2^6) = 12 \quad (\because (2)),$$

$$r(2^7) = r(2^6 \cdot 2) = r(12 \cdot 2) = r(24) = 11,$$

$$r(2^8) = r(2^7 \cdot 2) = r(11 \cdot 2) = r(22) = 9,$$

$$r(2^9) = r(2^8 \cdot 2) = r(9 \cdot 2) = r(18) = 5,$$

$$r(2^{10}) = r(2^9 \cdot 2) = r(5 \cdot 2) = r(10) = 10,$$

$$r(2^{11}) = r(2^{10} \cdot 2) = r(10 \cdot 2) = r(20) = 7$$

よって、 $r(2^n)$ は 1 以上 12 以下のすべての整数の値をとる。 ……(証明終わり)