以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n で，n^2-1 が素数になるものをすべて求めよ．

(2) $0 \leqq n \leqq m$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ で，$3m^2+mn-2n^2$ が素数になるものをすべて求めよ．

(3) 0 以上の整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ で，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数になるものをすべて求めよ．

(19 大阪府大 現シス・地保 4)

【答】

(1) $n=2$
(2) $(m,\ n)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$
(3) $(m,\ n)=(5,\ 2),\ (3,\ 0)$

【解答】

(1) n は自然数で

$$n^2-1=(n-1)(n+1)$$

であるから，n^2-1 が素数となるためには

$$n-1=1 \quad \text{すなわち} \quad n=2$$

であることが必要である．

$n=2$ のとき，$n^2-1=2^2-1=3$ となり，n^2-1 は素数であるから十分である．

よって，求める n は　$\boldsymbol{n=2}$　である．　……(答)

(2) $m,\ n$ は $0 \leqq n \leqq m$ を満たす整数であり

$$3m^2+mn-2n^2=(m+n)(3m-2n)$$

であるから，$3m^2+mn-2n^2$ が素数となるためには

$$m+n=1 \quad \text{または} \quad 3m-2n=1$$

であることが必要である．

(i) $m+n=1$ のとき

$0 \leqq n \leqq m$ から　$(m,\ n)=(1,\ 0)$

このとき，$3m-2n=3$ であり，$3m^2+mn-2n^2=1\cdot 3=3$ は素数である．

(ii) $3m-2n=1$ のとき

$m=\dfrac{1}{3}(2n+1)$ であるから，$n \leqq m$ より

$$n \leqq \frac{1}{3}(2n+1) \qquad \therefore \quad 0 \leqq n \leqq 1 \qquad \therefore \quad (m,\ n)=(1,\ 1)$$

このとき，$m+n=2$ であり，$3m^2+mn-2n^2=2\cdot 1=2$ は素数である．

(i)，(ii) から，求める組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(1,\ 0),\ (1,\ 1)}$$　……(答)

(3) m について整理すると

$$\begin{aligned} & m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16 \\ =\ & m^4-3(n^2+2)m^2-4(n^4+4n^2+4) \\ =\ & m^4-3(n^2+2)m^2-4(n^2+2)^2 \\ =\ & (m^2-4n^2-8)(m^2+n^2+2) \end{aligned}$$

$m^2-4n^2-8<m^2+n^2+2$ であるから，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数となるためには

$$m^2-4n^2-8=1 \qquad \therefore \quad m^2-4n^2=9$$

であることが必要である．これを満たす整数の組 $(m,\ n)$ を求める．

$$(m-2n)(m+2n)=9$$

$m-2n \leqq m+2n,\ m+2n \geqq 0$ であるから

$m-2n$	1	3
$m+2n$	9	3

$$\therefore \quad (m,\ n)=(5,\ 2),\ (3,\ 0)$$

$(m,\ n)=(5,\ 2)$ のとき　$m^2+n^2+2=31$,
$(m,\ n)=(3,\ 0)$ のとき　$m^2+n^2+2=11$

であり，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ はそれぞれ $1\cdot 31=31,\ 1\cdot 11=11$ となり，どちらのときも素数である．

よって，求める組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(5,\ 2),\ (3,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$