

次の問に答えよ。

- (1) 720 を素因数分解せよ。
- (2) 720 の正の約数の個数を求めよ。
- (3) 720 の正の約数の総和を求めよ。
- (4) 720 の正の約数の組 (a, b) の中で、 a と b が互いに素となるものの個数を求めよ。
ただし、 $a < b$ とする。

(19 大阪教大 3)

【答】

- (1) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- (2) 30
- (3) 2418
- (4) 67

【解答】

- (1) 720 を素因数分解すると

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) (1) より、720 の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3) (1) より、720 の約数の総和は

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 3 + 9)(1 + 5) \\ &= 31 \cdot 13 \cdot 6 \\ &= \mathbf{2418} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (4) a, b の大小を無視して互いに素となるものを数える。

(i) $a = 1$ のとき

b は 720 の正の約数であるから 30 個

(ii) $a = 2^p$ ($p = 1, 2, 3, 4$) のとき

b は 2 を因数にもたない 720 の正の約数であるから $(2+1)(1+1) = 6$ 個

(iii) $a = 3^q$ ($q = 1, 2$) のとき

b は 3 を因数にもたない 720 の正の約数であるから $(4+1)(1+1) = 10$ 個

(iv) $a = 5$ のとき

b は 5 を因数にもたない 720 の正の約数であるから $(4+1)(2+1) = 15$ 個

(v) $a = 2^p \cdot 3^q$ ($p = 1, 2, 3, 4; q = 1, 2$) のとき

b は 2 と 3 を因数にもたない 720 の正の約数であるから 2 個

(vi) $a = 3^q \cdot 5$ ($q = 1, 2$) のとき

b は 3 と 5 を因数にもたない 720 の正の約数であるから 5 個

(vii) $a = 2^p \cdot 5$ ($p = 1, 2, 3, 4$) のとき

b は 2 と 5 を因数にもたない 720 の正の約数であるから 3 個

(viii) $a = 2^p \cdot 3^q \cdot 5$ ($p = 1, 2, 3, 4; q = 1, 2$) のとき

b は 2 と 3 と 5 を因数にもたない 720 の正の約数であるから 1 個

(i)~(viii) から, b は

$$\begin{aligned} & 1 \times 30 + 4 \times 6 + 2 \times 10 + 1 \times 15 + 4 \cdot 2 \times 2 + 2 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \cdot 2 \times 1 \\ &= 30 + 24 + 20 + 15 + 16 + 10 + 12 + 8 \\ &= 135 \text{ (個)} \end{aligned}$$

このうち, $a = b$ となるのは, $a = b = 1$ のときのみであり, $a < b$ を満たす組 (a, b) は

$$(135 - 1) \times \frac{1}{2} = \mathbf{67} \text{ (個)} \quad \dots\dots \text{(答)}$$