a を自然数とする．自然数 n に対し，$b_n = n(n^2+a)$ とする．このとき，命題

$(*)$ すべての自然数 n に対し，b_n は 6 の倍数である

について，次の各問に答えよ．

(1) $a=5$ のとき，命題 $(*)$ が真であることを示せ．
(2) 命題 $(*)$ が真であるような a の値をすべて求めよ．

(19 宮崎大 工・教・農 5)

【答】

(1) 略
(2) 6 で割って 5 余るすべての自然数

【解答】

(1) $a=5$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= n(n^2+5) \\ &= n(n^2-1+6) \\ &= (n-1)n(n+1)+6n \end{aligned}$$

ここで，第 1 項の $(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積だから，2 の倍数かつ 3 の倍数であり，6 の倍数である．また，第 2 項の $6n$ も 6 の倍数である．

よって，b_n は 6 の倍数である．　　……(証明終わり)

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= n(n^2+a) \\ &= n(n^2-1+a+1) \\ &= (n-1)n(n+1)+(a+1)n \end{aligned}$$

$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数だから，b_n がすべての自然数 n について 6 の倍数になる条件は，$(a+1)n$ がすべての自然数 n について 6 の倍数になることである．

よって，$a+1$ は 6 の倍数，すなわち，a の値は

「**6 で割って 5 余るすべての自然数**」　　……(答)

である．