自然数 n に対し，$f(n)=n^2(n^2+8)$ と定める．

(1) $f(4)$ の正の約数の個数を求めよ．

(2) $f(n)$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

(3) $f(n)$ の正の約数の個数が 10 個であるような n をすべて求めよ．

(19 徳島大 医・歯・薬 1)

【答】

(1) 16 個
(2) 略
(3) $n=2,\ 9$

【解答】

$$f(n)=n^2(n^2+8)$$

(1) $n=4$ のとき

$$f(4)=4^2(4^2+8)=2^4\cdot 24=2^7\cdot 3$$

よって，$f(4)$ の正の約数の個数は

$$(7+1)(1+1)=\mathbf{16}\ (\text{個})$$ ……(答)

(2) n を 3 で割った余りで分類すると

(i) $n\equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 0^2(0^2+8)=0 \pmod 3$$

(ii) $n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 1^2(1^2+8)=9\equiv 0 \pmod 3$$

(iii) $n\equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 2^2(2^2+8)=4\cdot 12\equiv 1\cdot 0=0 \pmod 3$$

(i)，(ii)，(iii) より，$f(n)$ は 3 の倍数である． …… (証明終わり)

(3) $f(n)$ を素因数分解したとき

$$f(n)={p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\cdots{p_k}^{a_k}\quad (p_i\text{は素数で}, p_1<p_2<\cdots<p_k,\ a_i\ \text{は自然数})$$

と表されるものとする．このとき，$f(n)$ の約数の個数 m は

$$m=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$$

である．$m=10$ となるのは，$m=10,\ 2\times 5$ であるから，$k=1$ または 2 である．このとき

$$a_1=9\quad\text{または}\quad(a_1,\ a_2)=(1,\ 4),\ (4,\ 1)$$

すなわち，

$$f(n)={p_1}^9\quad\text{または}\quad f(n)=p_1{p_2}^4\quad\text{または}\quad f(n)={p_1}^4p_2$$

である．

(ⅰ) $f(n)={p_1}^9$ のとき

(2) より $f(n)$ は 3 の倍数だから $p_1=3$ であり，$f(n)=3^9$ となる．

$$n^2(n^2+8)=3^9$$

$n^2 \not\equiv n^2+8 \pmod 3$ かつ $n^2<n^2+8$ であるから

$$\begin{cases} n^2=1 \\ n^2+8=3^9 \end{cases}$$

これを満たす n は存在しない．

(ii) $f(n)=p_1{p_2}^4$ のとき

(2) より

$$n^2(n^2+8)=3{p_2}^4\ (p_2>3) \quad \text{または} \quad 2\cdot3^4$$

である．さらに，$n^2 \not\equiv n^2+8 \pmod 3$ より，n^2，n^2+8 の一方のみ 3 の倍数であるから

	(ア)	(イ)	(ウ)
n^2	1	${p_2}^2$	1
n^2+8	$3{p_2}^4$	$3{p_2}^2$	$2\cdot3^4$

(ア) を満たす素数 p_2 は存在しない．

(イ) を満たす素数 p_2 は $p_2=2$ であるが，$p_2>3$ に反する．

(ウ) を満たす自然数 n は存在しない．

(iii) $f(n)={p_1}^4p_2$ のとき

(2) より

$$n^2(n^2+8)=3^4p_2\ (p_2>3) \quad \text{または} \quad 2^4\cdot3$$

である．さらに，$n^2 \not\equiv n^2+8 \pmod 3$ より，n^2，n^2+8 の一方のみが 3 の倍数であるから

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
n^2	1	3^4	1	2^2	2^4
n^2+8	3^4p_2	p_2	$2^4\cdot3$	$2^2\cdot3$	3

(ア) を満たす素数 p_2 は存在しない．

(イ) を満たす自然数 n，素数 $p_2\ (>3)$ は $(n,\ p_2)=(9,\ 89)$ である．

(ウ) を満たす自然数 n は存在しない．

(エ) を満たす自然数 n は 2 である．

(オ) を満たす自然数 n は存在しない．

$n=2,\ 9$ は条件を満たす．

以上，(ⅰ)，(ii)，(iii) より，求める n は

$$\boldsymbol{n=2,\ 9} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．