自然数 n に対し，$f(n)=n^2(n^2+8)$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f(4)$ の正の約数の個数を求めよ．

(2) $f(n)$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

(3) $f(n)$ の相異なる素因数の個数が 2 個であり，かつ $f(n)$ の正の約数の個数が 10 個であるとする．n をすべて求めよ．

(19 徳島大 理工・医 (保) 2)

【答】

(1) 16 個
(2) 略
(3) $n=2,\ 9$

【解答】

$$f(n)=n^2(n^2+8)$$

(1) $n=4$ のとき

$$f(4)=4^2(4^2+8)=2^4\cdot 24=2^7\cdot 3$$

よって，$f(4)$ の正の約数の個数は

$$(7+1)(1+1)=\mathbf{16}\ (個) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) n を 3 で割った余りで分類すると

(i) $n\equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 0^2(0^2+8)=0 \pmod 3$$

(ii) $n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 1^2(1^2+8)=9\equiv 0 \pmod 3$$

(iii) $n\equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$f(n)\equiv 2^2(2^2+8)=4\cdot 12\equiv 1\cdot 0=0 \pmod 3$$

(i)，(ii)，(iii) より，$f(n)$ は 3 の倍数である．　　　　…… (証明終わり)

(3) $f(n)$ の相異なる素因数は 2 個であるから，$f(n)$ を素因数分解したとき

$$f(n)={p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2} \quad (p_1,\ p_2\ は素数で,\ p_1<p_2,\ a_1,\ a_2\ は自然数)$$

と表される．このとき，$f(n)$ の約数の個数 m は

$$m=(a_1+1)(a_2+1)$$

である．$m=10\ (=2\times 5)$ となるのは

$$(a_1,\ a_2)=(1,\ 4),\ (4,\ 1)$$

すなわち，

$$f(n)=p_1{p_2}^4 \quad または \quad f(n)={p_1}^4p_2$$

である．

(i) $f(n)=p_1{p_2}^4$ のとき

(2) より

$$n^2(n^2+8)=3{p_2}^4\ (p_2>3)\quad または\quad 2\cdot 3^4$$

である．さらに，$n^2 \not\equiv n^2+8 \pmod 3$ より，n^2，n^2+8 の一方のみ 3 の倍数であるから

	(ア)	(イ)	(ウ)
n^2	1	${p_2}^2$	1
n^2+8	$3{p_2}^4$	$3{p_2}^2$	$2\cdot 3^4$

(ア) を満たす素数 p_2 は存在しない．

(イ) を満たす素数 p_2 は $p_2=2$ であるが，$p_2>3$ に反する．

(ウ) を満たす自然数 n は存在しない．

(ii) $f(n)={p_1}^4p_2$ のとき

(2) より

$$n^2(n^2+8)=3^4p_2\ (p_2>3)\quad または\quad 2^4\cdot 3$$

である．さらに，$n^2 \not\equiv n^2+8 \pmod 3$ より，n^2，n^2+8 の一方のみが 3 の倍数であるから

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
n^2	1	3^4	1	2^2	2^4
n^2+8	3^4p_2	p_2	$2^4\cdot 3$	$2^2\cdot 3$	3

(ア) を満たす素数 p_2 は存在しない．

(イ) を満たす自然数 n，素数 p_2 (>3) は $(n,\ p_2)=(9,\ 89)$ である．

(ウ) を満たす自然数 n は存在しない．

(エ) を満たす自然数 n は 2 である．

(オ) を満たす自然数 n は存在しない．

$n=2,\ 9$ は条件を満たす．

以上，(i)，(ii)，(iii) より，求める n は

$$\boldsymbol{n=2,\ 9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．