等式 $abc=a+b+c$ を満たす自然数の列 $(a,\ b,\ c)$ は全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個存在する．そのうち $a+b+c$ の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(19 早稲田大 国際教養 1(2))

【答】

ウ	エ
6	6

【解答】

$$abc=a+b+c \qquad \cdots\cdots ①$$

まずは，$a\leqq b\leqq c$ となる自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を求める．①から

$$abc=a+b+c\leqq c+c+c=3c$$

$$\therefore\quad abc\leqq 3c$$

$$\therefore\quad ab\leqq 3\quad (\because\ c>0)$$

$a,\ b$ は $a\leqq b$ を満たす自然数であるから

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$$

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき

$$①\iff c=1+1+c \qquad \text{①を満たす } c \text{ は存在しない．}$$

$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき

$$①\iff 2c=1+2+c \qquad \therefore\quad c=3$$

$(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき

$$①\iff 3c=1+3+c \qquad \therefore\quad c=2 \qquad \text{これは } a\leqq b\leqq c \text{ を満たさないから不適．}$$

よって，$a\leqq b\leqq c$ のとき，②を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3)$$

ここで，$a\leqq b\leqq c$ の条件をはずすと，自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$3!=\boxed{\mathbf{6}}\ \text{個} \qquad \cdots\cdots \text{(ウの答)}$$

存在し，これらはすべて $a+b+c=6$ であるから，$a+b+c$ の

$$\text{最大値は } \boxed{\mathbf{6}} \qquad \cdots\cdots \text{(エの答)}$$

である．