

正の約数の個数が 10 個である 2 桁の自然数をすべて求めなさい。

(19 横浜市大 医 1(1))

【答】 48, 80

【解答】

2 桁の自然数を N とすると、 N は

$$N = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k} \quad (a_i \text{ は素数で } a_1 < a_2 < \cdots < a_k, p_i \text{ は自然数})$$

とおくことができる。このとき、 N の正の約数の個数 m は

$$m = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$$

である。 $m = 10$ となるのは、 $m = 10$ 、 2×5 だから、 $k = 1$ または 2 で

$$p_1 = 9 \text{ または } (p_1, p_2) = (1, 4), (4, 1)$$

すなわち、 $N = a_1^9$ または $N = a_1 a_2^4$ または $N = a_1^4 a_2$ である。

(i) $N = a_1^9$ のとき

$$N \geq 2^9 = 512 \text{ より、} N \text{ は 3 桁以上なので不適である。}$$

(ii) $N = a_1 a_2^4$ のとき

$$N \geq 2 \cdot 3^4 = 162 \text{ より、} N \text{ は 3 桁以上なので不適である。}$$

(iii) $N = a_1^4 a_2$ のとき

$$a_1 \geq 3 \text{ ならば、} N \geq 3^4 \cdot 5 = 405 \text{ より、} N \text{ は 3 桁以上なので不適である。}$$

ゆえに、 $a_1 = 2$ であり、 $N = 2^4 a_2 = 16a_2$ である。

(ア) $a_2 = 3$ のとき、 $N = 16 \cdot 3 = 48$ であり、 N は 2 桁の自然数である。

(イ) $a_2 = 5$ のとき、 $N = 16 \cdot 5 = 80$ であり、 N は 2 桁の自然数である。

(ウ) $a_2 \geq 7$ のとき、 $N \geq 16 \cdot 7 = 112$ であり、 N は 3 桁以上なので不適である。

以上より、求める自然数は

48, 80

……(答)

である。