任意の自然数 n に対して，n^5-n は 30 で割り切れることを示せ．

(19 琉球大 教育・農・国 5(2))

【答】 略

【解答】

$$30=2\cdot 3\cdot 5$$

であり，n^5-n は 2 かつ 3 かつ 5 の倍数であることを示せばよい．

$$n^5-n=n(n^4-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1) \qquad \cdots\cdots ①$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であるから

「n^5-n は 2 の倍数かつ 3 の倍数」である．　　$\cdots\cdots (*)$

また，すべての自然数 n は

$$n=5k,\ 5k\pm 1,\ 5k\pm 2 \quad (k \text{ は 0 以上の整数})$$

のいずれかの形で表される．

$n=5k$ のとき，①から，n^5-n は 5 の倍数である．
$n=5k\pm 1$ のとき，$n\mp 1=5k$ (複号同順) であり，①から，n^5-n は 5 の倍数である．
$n=5k\pm 2$ のとき，$n^2+1=(5k\pm 2)^2+1=5(5k^2\pm 4k+1)$ (複号同順) であり，①から，n^5-n は 5 の倍数である．

いずれのときも

「n^5-n は 5 の倍数」である．　　$\cdots\cdots (**)$

$(*)$ かつ $(**)$ より，n^5-n は 30 で割り切れる．　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)