等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(19 長崎大・教・経・水・環 1(2))

【答】 $(x,\ y)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)$

【解答】

分母を払って，(多項式) × (多項式) = (整数) に形に変形する.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$$

分母を払い

$$3y+3x=2xy$$

x について整理し

$$(2y-3)x-3y=0$$

共通項 $(2y-3)$ をつくり，積をつくると

$$(2y-3)x-\frac{3}{2}(2y-3)-\frac{9}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)(2y-3)=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\quad (2x-3)(2y-3)=9$$

$x,\ y$ は自然数だから

$$2x-3\geqq -1,\ 2y-3\geqq -1$$

であり，条件を満たす整数の組は

$2x-3$	1	3	9
$2y-3$	9	3	1

$\therefore$

x	2	3	6
y	6	3	2

よって，条件を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)}$$ ……(答)