r を正の実数とする．複素数平面上に，点 α を中心とする半径 r の円 C がある．ただし，C は原点を通らないものとする．点 z が円 C 上を動くとき，点 $w=\dfrac{1}{z}$ の描く図形を C' とする．

(1) C' は円であることを示せ．さらに，C' の中心と半径を α と r で表せ．
(2) C と C' が一致するとき，C の中心 α は実軸上または虚軸上にあることを示せ．

(19 北海道大 後 理・工 3)

【答】

(1) 証明略．中心 $\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2-r^2}$，半径 $\dfrac{r}{\left||\alpha|^2-r^2\right|}$

(2) 略

【解答】

$$C : |z-\alpha| = r \qquad \cdots\cdots ①$$

ただし，C は原点を通らないから，(原点と中心との距離) $\fallingdotseq$ (半径) であり

$$|\alpha| \fallingdotseq r\ (>0) \qquad \cdots\cdots ②$$

である．また

$$w=\frac{1}{z} \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) 点 z が円 C 上を動くときの ③ をみたす点 w の描く図形 C' は,「① かつ ② かつ ③ を満たす z が存在する $\cdots\cdots$ $(*)$」ような w の集合である．

$$「① かつ ③」\iff \begin{cases} |z-\alpha|=r \\ zw=1 \text{ かつ } z \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

$zw=1$ により $z \fallingdotseq 0$ かつ $w \fallingdotseq 0$ であるから

$$「① かつ ③」\iff \begin{cases} |z-\alpha|=r \\ zw=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=\dfrac{1}{w} & \cdots\cdots ③' \\ \left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|=r & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④ をみたす w に対し z は ③$'$ により決まるから (z の存在が確認されるから)，C' は ② かつ ④ を満たす w の集合である．④ を変形する．

$$④ \iff |1-\alpha w|^2 = r^2|w|^2 \text{ かつ } w \fallingdotseq 0$$

第 1 の等式より $w \fallingdotseq 0$ は保証されるから

$$④ \iff (1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w}) = r^2 w\overline{w}$$
$$\therefore \quad (|\alpha|^2-r^2)w\overline{w} - \alpha w - \overline{\alpha}\,\overline{w} + 1 = 0$$

② より，$|\alpha|^2 - r^2 \fallingdotseq 0$ であるから，両辺を $|\alpha|^2 - r^2$ で割ると

$$w\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\overline{w} + \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} = 0$$

$$\therefore \quad \left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)$$

$$= \frac{\alpha\overline{\alpha}}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} - \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2}$$

$$\therefore \quad \left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right) = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$

$$\therefore \quad \left|w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right|^2 = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2}$$

$$\therefore \quad \left|w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$$

よって，$\boldsymbol{C'}$ は円であり，中心は $\boldsymbol{\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}}$，半径は $\boldsymbol{\dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}}$ である．　……(答)

(2) C と C' が一致するとき，中心と半径が一致するから

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2} & \cdots\cdots ⑤ \\ r = \dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|} & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

が成り立つ．⑥ と $r > 0$ より

$$||\alpha|^2 - r^2| = 1 \qquad \therefore \quad |\alpha|^2 - r^2 = \pm 1$$

これと⑤より

$$\alpha = \pm\overline{\alpha} \qquad \therefore \quad \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} = 0 \text{ または } \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} = 0$$

すなわち

「(α の虚部) $= 0$」または「(α の実部) $= 0$」

である．よって，C の中心 α は実軸上または虚軸上にある．　…… (証明終わり)