複素数 z_n を

$$z_1=1,\quad z_{n+1}=iz_n+2\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める．ただし，i は虚数単位である．

(1) $n=2019$ のとき，z_n を求めよ．

(2) すべての z_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を通る円の中心と半径を求めよ．

(19 学習院大 理・文 3)

【答】

(1) $z_{2019}=1+2i$

(2) 中心は $1+i$, 半径は 1

【解答】

$$z_1=1,$$

$$z_{n+1}=iz_n+2(n\geqq 1)\qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $$\alpha=i\alpha+2\qquad \cdots\cdots ②$$

を解くと

$$(1-i)\alpha=2\qquad \therefore\quad \alpha=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{1+1}=1+i$$

①, ② の辺々を引くと

$$z_{n+1}-(1+i)=i\{z_n-(1+i)\}$$

が得られる．数列 $\{z_n-(1+i)\}$ は，初項 $z_1-(1+i)=1-(1+i)=-i$，公比 i の等比数列であるから

$$z_n-(1+i)=(-i)\cdot i^{n-1}=-i^n$$

$$\therefore\quad z_n=1+i-i^n\qquad \cdots\cdots ③$$

よって

$$\begin{aligned}z_{2019}&=1+i-i^{2019}=1+i-i^{4\cdot 54+3}\\&=1+i-(i^4)^{54}\cdot i^3\\&=1+i-1^{54}\cdot(-i)\\&=\boldsymbol{1+2i}\end{aligned}\qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

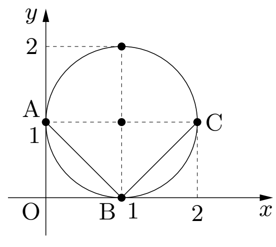
(2) ③ より，数列 $\{z_n\}$ は周期 4 で

$$1,\ 2+i,\ 1+2i,\ i$$

を繰り返す．すべての z_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を通る円は 4 点 $1,\ 2+i,\ 1+2i,\ i$ を通る円であり，その円の

中心は $\boldsymbol{1+i}$，半径は 1 $\cdots\cdots$(答)

である．



- A(i)，B(1)，C($2+i$) とおく．

$$\frac{i-1}{(2+i)-1}=-\frac{1-i}{1+i}=-\frac{(1-i)^2}{1+1}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

であり，$\angle\mathrm{CBA}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，AC は円の直径の一つであり，円の中心は $1+i$, 半径は 1 である．

- ③ より

$$|z_n-(1+i)|=|-i^n|=1$$

であるから，点 z_n $(n\geqq 1)$ はすべて中心 $1+i$，半径 1 上にある．