複素数 α, β, γ が表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，C とし，複素数平面の原点を O で表す．ただし，$A \neq B$, $A \neq O$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線であることを示せ．

(2) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，方程式 $z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$ を満たすことを示せ．

(3) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする．複素数平面上において，点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は，方程式 $z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$ を満たすことを示せ．

(19 広島大 後 理 (数) 1)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$

(1) $\alpha \neq 0$ より

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1 \iff \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha\overline{\alpha} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．このとき z と 0，z と α とのそれぞれの距離 $|z|$, $|z-\alpha|$ について

$$\begin{aligned}|z|^2-|z-\alpha|^2 &= z\overline{z}-(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})\\ &= z\overline{z}-(z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha})\\ &= \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}\\ &= 0 \quad (\because\ ①)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |z|=|z-\alpha| \qquad \cdots\cdots ②$$

よって，z は線分 OA の垂直二等分線上の点である．
逆に，z が線分 OA の垂直二等分線上の点であるならば，z は ② を満たす．

$$② \iff |z|^2=|z-\alpha|^2$$
$$\therefore \quad z\overline{z}=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$$
$$\therefore \quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$$

すなわち，z は ① を満たす．

以上より，方程式 $\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$ を満たす z が表す点の軌跡は，線分 OA の垂直二等分線上の点である． ……(証明終わり)

(2) 点 $P(z)$ が直線 AB 上にあるならば，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ (t は実数) と表すことができる．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned}&z-\alpha=t(\beta-\alpha)\ (t \text{ は実数})\\ \iff &\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ は実数} \quad (\because\ \alpha \neq \beta)\\ \iff &\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}-\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=0 \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

である．左辺を整理すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \\ &= \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\overline{z}-\dfrac{1}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}} \quad (\because\ \alpha\overline{\alpha}=1,\ \beta\overline{\beta}=1) \\ &= \frac{(z-\alpha)+(\alpha\beta\overline{z}-\beta)}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{z+\alpha\beta\overline{z}-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

であるから

$$③ \iff z+\alpha\beta\overline{z}-\alpha-\beta=0$$

よって，z は

$$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$$

を満たす． …… (証明終わり)

(3) 点 P(z) が点 C を通り直線 AB に垂直な直線上にあるならば，「$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ または P=C」である．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned}&\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} = t\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\ (t \text{ は実数}) \\ \iff &\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} \text{ が純虚数 または } 0 \\ \iff &\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \overline{\left(\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha}\right)} = 0\end{aligned}$$

である．左辺を整理すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\overline{z}-\overline{\gamma}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \\ &= \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\overline{z}-\overline{\gamma}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{z-\gamma-\alpha\beta(\overline{z}-\overline{\gamma})}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{z-\alpha\beta\overline{z}-\gamma+\alpha\beta\overline{\gamma}}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

よって，z は

$$z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$$

を満たす． …… (証明終わり)