複素数平面において，複素数 2, $4i$, z を表す点をそれぞれ A，B，C とする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) △ABC が ∠ACB を直角とする直角二等辺三角形となるように，複素数 z の値を定めよ．

(2) △ABC が正三角形となるように，複素数 z の値を定めよ．

(19 弘前大 理工・医・教育 2)

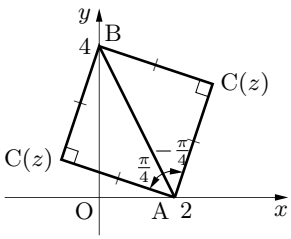
【答】

(1) $z=-1+i,\ 3+3i$

(2) $z=1+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i,\ 1-2\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})i$

【解答】

(1) 線分 AC は点 A を中心に線分 AB を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して，$\pm\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものである．この移動により点 B は点 C にうつる．以下，複号同順として計算すると



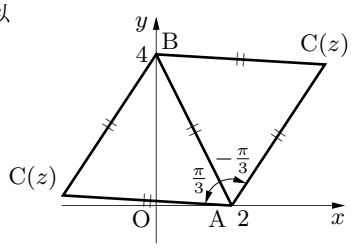
$$\begin{aligned} z-2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}(4i-2) \\ &= \frac{1\pm i}{2}(-2+4i) \\ &= (1\pm i)(-1+2i) \\ &= (-1\mp 2)+(2\mp 1)i \\ &= -3+i,\ 1+3i \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{z=-1+i,\ 3+3i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 点 C は点 B を点 A を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である．以下，複号同順として計算すると



$$\begin{aligned} z-2 &= \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(4i-2) \\ &= \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(-2+4i) \\ &= (1\pm\sqrt{3}i)(-1+2i) \\ &= (-1\mp 2\sqrt{3})+(2\mp\sqrt{3})i \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{z=1+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i,\ 1-2\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．