n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての n に対し，$a_n = 4n + 1 - (-3)^n$ は 8 の倍数であることを示せ．

(2) すべての n に対し，$b_n = \dfrac{1}{4}n^2 - \dfrac{1}{8}n + \dfrac{1}{32}\{(-3)^n - 1\}$ は整数であることを示せ．

(19 東京海洋大 生命・資源 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) すべての自然数 n に対し，「$a_n = 4n + 1 - (-3)^n$ は 8 の倍数である …… $(*)$」ことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = 4 + 1 - (-3) = 8$$

であり，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4(k+1) + 1 - (-3)^{k+1} \\ &= 4k + 5 + 3(-3)^k \\ &= 4k + 5 + 3(4k + 1 - a_k) \\ &= 8(2k + 1) - 3a_k \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，すべての自然数 n で $(*)$ は成り立つ． …… (証明終わり)

(2) すべての自然数 n に対し「$b_n = \dfrac{1}{4}n^2 - \dfrac{1}{8}n + \dfrac{1}{32}\{(-3)^n - 1\}$ は整数である …… $(**)$」ことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$b_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{4}{32} = 0$$

であり，$(**)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，$(**)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{1}{4}(k+1)^2 - \frac{1}{8}(k+1) + \frac{1}{32}\{(-3)^{k+1} - 1\} \\ &= \frac{1}{4}(k^2 + 2k + 1) - \frac{1}{8}(k+1) - \frac{1}{32} - \frac{3}{32}(-3)^k \\ &= \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{8}k + \frac{3}{32} - 3\left(b_k - \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k + \frac{1}{32}\right) \\ &= k^2 - 3b_k \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，すべての自然数 n で $(**)$ は成り立つ． …… (証明終わり)