確率と漸化式

三角形 ABC がある．点 P は頂点 A から出発し，隣の 2 つの頂点のどちらかに，等しく $\frac{1}{2}$ の確率で次々に移動する．n を自然数とし，n 回目の移動のあとに点 P が頂点 A，B，C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする．例えば，$n=1$ のときは，$a_1=0$，$b_1=c_1=\frac{1}{2}$ である．次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を b_n と c_n を用いて表せ．

(2) すべての n について，$b_n=c_n$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ．

(3) a_{n+1} を a_n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $|a_n-b_n|$ が 10^{-5} より小さくなる最小の n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

(19 北海道教大 3)

【答】

(1) $a_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n}{2}$

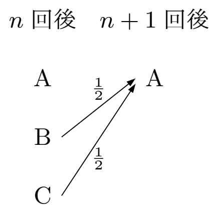
(2) 略

(3) $a_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4) 17

【解答】

(1) $n+1$ 回目の移動のあとに点 P が頂点 A にあるのは，右のように n 回目の移動のあとに点 P が頂点 B または頂点 C にあり，このあとに頂点 A に移動するときであるから，a_{n+1} は



$$
\begin{aligned}
a_{n+1}&=b_n\cdot\frac{1}{2}+c_n\cdot\frac{1}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{b_n+c_n}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

と表すことができる．

(2) すべての n について

$$b_n=c_n \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

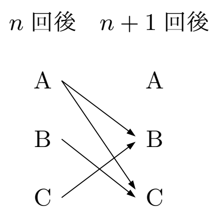
が成り立つことを数学的帰納法によって示す．

(i) $n=1$ のとき

$b_1=c_1=\frac{1}{2}$ であるから，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

(1) と同様に



$$b_{k+1}=\frac{a_k+c_k}{2},\quad c_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$$

が成り立つ．帰納法の仮定により $b_k=c_k$ であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ． $\cdots\cdots$(証明終わり)

(3) 点 P は三角形のいずれかの頂点には必ずあるので，

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad (\because\ (\text{確率の総和}) = 1)$$

すなわち，$b_n + c_n = 1 - a_n$ であり，(1) の式は

$$a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．

$$t = \frac{1-t}{2} \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{3}$$

より，① は

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる．数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(4) $a_n + b_n + c_n = 1$ と $b_n = c_n$ より

$$b_n = \frac{1-a_n}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となるので

$$|a_n - b_n| = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である．$|a_n - b_n|$ が 10^{-5} より小さくなる最小の n は

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{10^5} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^5} \iff 2^n > 10^5$$

を満たす自然数である．両辺の対数を計算すると

$$n \log_{10} 2 > 5$$

$$\therefore \quad n > \frac{5}{\log_{10} 2} = \frac{5}{0.3010} = 16.61\cdots$$

であるから，求める n は **17** である． ……(答)