関数 $g(x)=ax^3+bx^2+cx$ の導関数 $g'(x)$ を $h(x)$ とおく．
関数 $f(x)=x^2-4x$ と関数 $h(x)$ を用いて

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<0,\ 3<x) \\ h(x) & (0 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

で表される曲線を C_0 とし，直線 L の方程式を $y=(t-4)x$ とする．ただし，$a,\ b,\ c$ は定数であり，$t>0$ とする．次の各問に答えなさい．

(1) $a=1$ とし，関数 $g(x)$ は $x=3$ で極小値 0 をとる．

(i) b と c の値をそれぞれ求めなさい．

(ii) $-1 \leqq x \leqq 3$ における関数 $g(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めなさい．

(iii) 点 $(0,\ -3)$ から曲線 $y=h(x)$ に引いたすべての接線の方程式をそれぞれ求めなさい．

(2) $a=-\dfrac{1}{3},\ b=1,\ c=0$ とし，直線 L と曲線 C_0 は異なる 3 つの共有点をもつ．
また，連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq h(x) \\ y \geqq (t-4)x \end{cases},\qquad \begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq h(x) \\ y \leqq (t-4)x \end{cases},\qquad \begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \geqq h(x) \\ y \leqq (t-4)x \end{cases}$$

の表す領域の面積をそれぞれ t の関数として $S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t)$ とする．

(i) 関数 $h(x)$ を求めなさい．

(ii) t の値の範囲を求めなさい．

(iii) $S_1(t)+S_2(t)$ の値を求めなさい．

(iv) $S_2(t)+S_3(t)$ を t の式で表しなさい．

(v) $S_1(t)=S_3(t)$ となるような t の値を求めなさい．

(19 帯広畜産大 10)

【答】

(1) (i) $b=-6,\ c=9$　(ii) 最大値 4，最小値 -16　(iii) $y=-3,\ y=-24x-3$

(2) (i) $h(x)=-x^2+2x$　(ii) $3<t<6$　(iii) $S_1(t)+S_2(t)=9$

(iv) $S_1(t)+S_3(t)=\dfrac{t^3}{6}$　(v) $t=3\sqrt[3]{2}$

【解答】

$$g(x)=ax^3+bx^2+cx$$

$$h(x)=g'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f(x)=x^2-4x$$

$$C_0: y=\begin{cases} f(x) & (x<0,\ 3<x) \\ h(x) & (0 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

$$L: y=(t-4)x\ (t>0)$$

(1) $a=1$ のときを考える．

$$g(x)=x^3+bx^2+cx$$

である．

(i) $g(x)$ が $x=3$ で極小値 0 をとるためには

$$\begin{cases} g'(3)=0 \\ g(3)=0 \end{cases}$$

が必要である．$g'(x)=3x^2+2bx+c$ より

$$\begin{cases} 27+6b+c=0 \\ 27+9b+3c=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad b=-6,\ c=9$$

逆に，$b=-6,\ c=9$ ならば

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3-6x^2+9x \\ &= x(x-3)^2 \\ g'(x) &= 3x^2-12x+9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(x)$ の増減は右のようになり $g(x)$ は $x=3$ で極小値 0 をとる (十分).

よって，$\boldsymbol{b=-6,\ c=9}$ である．　……(答)

(ii) $-1 \leqq x \leqq 3$ における $g(x)$ の増減は右のようになるから，$-1 \leqq x \leqq 3$ における $g(x)$ の

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
$g(x)$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

最大値 は　$g(1)=\boldsymbol{4}$　……(答)

最小値 は　$g(-1)=\boldsymbol{-16}$　……(答)

である．

(iii)
$$h(x)=g'(x)=3x^2-12x+9$$
$$h'(x)=6x-12$$

であるから，曲線 $y=h(x)$ 上の点 $(u,\ h(u))$ における接線の方程式は

$$y=(6u-12)(x-u)+3u^2-12u+9$$
$$\therefore \quad y=(6u-12)x-3u^2+9$$

これが点 $(0,\ -3)$ を通るから

$$-3=-3u^2+9 \qquad \therefore \quad u^2=4 \qquad \therefore \quad u=\pm 2$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-3,\ y=-24x-3}$$　……(答)

である．

(2) $a=-\dfrac{1}{3},\ b=1,\ c=0$ のとき

$$g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$$

である．

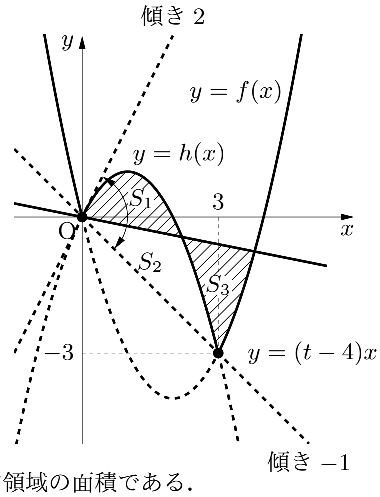
(i)
$$\boldsymbol{h(x)}=g'(x)=\boldsymbol{-x^2+2x}$$　……(答)

である．

(ii) $L: y=(t-4)x\ (t>0)$

$$C_0: y=\begin{cases} f(x)=x^2-4x & (x<0,\ 3<x) \\ h(x)=-x^2+2x & (0 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

を図示すると右図となる．



L と C_0 が異なる 3 つの共有点をもつから，L の傾き $t-4$ は原点 O$(0,\ 0)$ と $(3,\ -3)$ を通る直線の傾き -1 より大きく，$\displaystyle\lim_{x\to+0} h'(x)=\lim_{x\to+0}(-2x+2)=2$ より小さい．

$$-1<t-4<2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{3<t<6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) 3 つの連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq h(x) \\ y \geqq (t-4)x \end{cases},\quad \begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq h(x) \\ y \leqq (t-4)x \end{cases},\quad \begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \geqq h(x) \\ y \leqq (t-4)x \end{cases}$$

が表す領域の面積がそれぞれ $S_1(t)$，$S_2(t)$，$S_3(t)$ である．

$S_1(t)+S_2(t)$ は連立不等式 $f(x) \leqq y \leqq h(x)$ が表す領域の面積である．

$f(x)=h(x)$ を解くと

$$x^2-4x=-x^2+2x$$

$$2x(x-3)=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ 3$$

であるから

$$\begin{aligned} S_1(t)+S_2(t) &= \int_0^3 \{h(x)-f(x)\}\,dx \\ &= \int_0^3 \{(-x^2+2x)-(x^2-4x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^3 x(x-3)\,dx \\ &= 2\cdot\frac{(3-0)^3}{6} \\ &= \boldsymbol{9} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(iv) $S_2(t)+S_3(t)$ は連立不等式 $f(x) \leqq y \leqq (t-4)x$ が表す領域の面積である．

$f(x)=(t-4)x$ を解くと

$$x^2-4x=(t-4)x$$

$$x(x-t)=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ t\ (3<t<6)$$

であるから

$$\begin{aligned} S_2(t)+S_3(t) &= \int_0^t \{(t-4)x-f(x)\}\,dx \\ &= \int_0^t \{(t-4)x-(x^2-4x)\}\,dx \\ &= -\int_0^t x(x-t)\,dx \\ &= \frac{(t-0)^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{t^3}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(v)
$$S_1(t) = S_3(t) \iff S_1(t) + S_2(t) = S_3(t) + S(t)$$
であるから
$$9 = \frac{t^3}{6} \qquad \therefore \quad t^3 = 54 \qquad \therefore \quad t = 3\sqrt[3]{2}$$
$1 < \sqrt[3]{2} < 2$ より $3 < 3\sqrt[3]{2} < 6$ であり，(ii) の範囲を満たす．

よって，$\boldsymbol{t = 3\sqrt[3]{2}}$ である． ……(答)