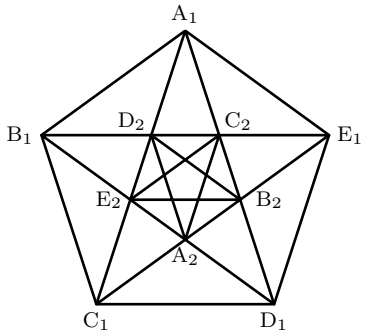
一辺の長さが a の正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ がある．対角線を結んで，内部に正五角形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ を図のように作る．さらに正五角形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ の対角線を結んで，内部に正五角形 $A_3B_3C_3D_3E_3$ を作る．この操作を繰り返し，正五角形 $A_kB_kC_kD_kE_k$ の内部に正五角形 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}E_{k+1}$ を作るとき，以下の問いに答えなさい．



(1) 正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ の対角線 B_1E_1 の長さを求めなさい．

(2) 正五角形 $A_kB_kC_kD_kE_k$ の一辺の長さを l_k とする．無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ の収束，発散について調べ，収束するならば和を求めなさい．

(19 大分大 医 1)

【答】

(1) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

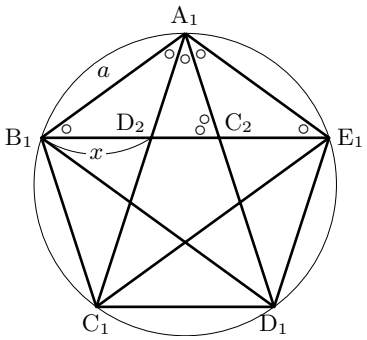
(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

【解答】

(1) 一辺の長さが a の正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ の外接円における各弧の円周角は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{360^\circ}{5}=32^\circ$ である．

$$\angle A_1C_2B_1=\angle E_1A_1C_2+\angle A_1E_1C_2=2\times 32^\circ$$

であるから，32° を $\circ$ で表すと右図となる．



$\triangle A_1B_1C_2$ に着目し，$B_1D_2=x$ とおくと，二等辺三角形 $\triangle A_1B_1D_2$，$\triangle A_1E_1C_2$ は合同なので

$$A_1C_2=E_1C_2=B_1D_2=x,$$

$\triangle A_1B_1C_2$ は $A_1B_1=B_1C_2$ の二等辺三角形なので

$$C_2D_2=B_1C_2-B_1D_2=a-x$$

である．

A_1D_2 は $\angle B_1A_1C_2$ の二等分線があるから

$$B_1D_2:D_2C_2=A_1B_1:A_1C_2$$

が成り立つ．

$$x:(a-x)=a:x$$
$$x^2=a(a-x)$$
$$x^2+ax-a^2=0$$

$x>0$ より

$$x=\frac{-a+\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$$

したがって

$$B_1E_1=B_1C_2+C_2E_1=a+x$$
$$=a+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$$
$$=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a}$$ ……(答)

である．

(2) 一辺の長さを l_k の正五角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k\mathrm{E}_k$ の $\mathrm{B}_k\mathrm{D}_{k+1}$，$\mathrm{B}_k\mathrm{E}_k$ の長さは，(1) の a を l_k におきかえると

$$\mathrm{B}_k\mathrm{D}_{k+1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}l_k, \quad \mathrm{B}_k\mathrm{E}_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}l_k$$

となる．

$$\begin{aligned} l_{k+1} &= \mathrm{C}_{k+1}\mathrm{D}_{k+1} = \mathrm{B}_k\mathrm{E}_k - 2\mathrm{B}_k\mathrm{E}_{k+1} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}l_k - 2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}l_k \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}l_k \end{aligned}$$

である．

よって，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ は初項 $l_1 = a$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ の無限等比級数であり，

$0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ であるから収束する．その和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{a}{1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．