極限，数列の和

各項が正の数である数列 $\{a_n\}$ がある．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，定数 p を用いて $S_n = pn^2 + n$ で表されるとする．また，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(3n-1)(2n+3)} = \frac{1}{3}$$

とする．

(1) p の値を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ．

(19 室蘭工大 3)

【答】

(1) $p=2$，$a_n = 4n-1 \ (n \geqq 1)$

(2) $T_n = \dfrac{1}{4}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{3})$

【解答】

(1) $S_n = pn^2 + n$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(3n-1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p+\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{p}{6}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{(3n-1)(2n+3)} = \frac{1}{3}$ のとき

$$\frac{p}{6} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{p=2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．このとき，$S_n = 2n^2 + n$ であり，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2n^2+n) - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= (2n^2+n) - (2n^2-3n+1) \\ &= 4n-1 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．$a_1 = S_1 = 3$ であり，① にまとめることができる．よって

$$\boldsymbol{a_n = 4n-1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$

となるから

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}) = \frac{1}{4}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{3})} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．