数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．z_n は n によらない定数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\dfrac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ．

(19 筑波大 5)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) $\log(e - 1)$

【解答】

(1) $f(x) = e^x$ とおく．$f(x)$ は実数全体で微分可能であるから，$t > 0$ のとき，平均値の定理を用いると

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(\mathrm{c}) \qquad \therefore \quad \frac{e^t - 1}{t} = e^c$$

となる実数 c が $0 < c < t$ に存在する．e^x は単調増加であるから

$$e^0 < e^c < e^t \qquad \therefore \quad e^0 < \frac{e^t - 1}{t} < e^t$$

よって，$1 \leqq \dfrac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$ は成り立つ． ……(証明終わり)

- $t > 0$ のとき

$$1 \leqq \frac{e^t - 1}{t} \leqq e^t \iff t \leqq e^t - 1 \leqq te^t \qquad \cdots\cdots ㋐$$

であるから，㋐ を示してもよい．
$g(t) = (e^t - 1) - t$ $(t > 0)$ とおくと

$$g'(t) = e^t - 1 > 0 \quad (\because\ t > 0)$$

$g(t)$ は単調増加であり，$g(0) = 0$ より，$t > 0$ において $g(t) > 0$ である．
$h(t) = te^t - (e^t - 1)$ $(t > 0)$ とおくと

$$h'(t) = (1 \cdot e^t + te^t) - e^t = te^t > 0 \quad (\because\ t > 0)$$

$h(t)$ は単調増加であり，$h(0) = 0$ より，$t > 0$ において $h(t) > 0$ である．
よって，$t > 0$ のとき，不等式 ㋐ は成り立つ．

(2) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ より

$$x_n = \log\left(e^{\frac{1}{2^n}}+1\right),\quad y_n = \log\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right)$$

ここで，$\left(e^{\frac{1}{2^k}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{2^k}}+1\right) = e^{\frac{1}{2^{k-1}}}-1$ となることに注意すると

$$\begin{aligned}
z_n &= y_n + \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \log\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right) + \sum_{k=1}^{n}\log\left(e^{\frac{1}{2^k}}+1\right) \\
&= \log\left\{\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{2^n}}+1\right)\left(e^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1\right)\cdots\left(e^{\frac{1}{2^2}}+1\right)\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)\right\} \\
&= \log\left\{\left(e^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1\right)\cdots\left(e^{\frac{1}{2^2}}+1\right)\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)\right\} \\
&= \cdots \\
&= \log\left\{\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)\right\} \\
&= \log(e-1)
\end{aligned}$$

であり，z_n は n によらない定数である． ……(証明終わり)

(3)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\{\log(e^{a_k}+1)-\log 2\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k - n\log 2 \\
&= z_n - y_n - n\log 2 \\
&= \log(e-1) - \log\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right) - n\log 2 \quad (\because\ (2)) \\
&= \log(e-1) - \log\left\{2^n\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right\} \qquad \cdots\cdots (*)
\end{aligned}$$

ここで，(1) において，$t = \dfrac{1}{2^n}(>0)$ とおくと

$$1 \leqq \frac{e^{\frac{1}{2^n}}-1}{\frac{1}{2^n}} \leqq e^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore\quad 1 \leqq 2^n\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right) \leqq e^{\frac{1}{2^n}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2^n}} = 1$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\left\{2^n\left(e^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right\} = 0$$

したがって，$(*)$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_n}+1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{e^{\alpha_k}+1}{2}\right) = \mathbf{\log(e-1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$