極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan(\pi x)-1}{4x-1}$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(19 立教大 理 1(5))

【答】

キ
$\dfrac{\pi}{2}$

【解答】

$\dfrac{0}{0}$ の不定形を解消するように，式を変形する．

$t=x-\dfrac{1}{4}$ とおくと，$x\to\dfrac{1}{4}$ のとき $t\to 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan(\pi x)-1}{4x-1} &= \lim_{t\to 0}\frac{\tan\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{4\left(t+\dfrac{1}{4}\right)-1}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\tan\pi t+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\pi t\tan\dfrac{\pi}{4}}-1}{4t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\tan(\pi t)+1}{1-\tan\pi t}-1}{4t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2\tan\pi t}{4t(1-\tan\pi t)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{2t\cos\pi t(1-\tan\pi t)}\\
&= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{1}{\cos\pi t}\cdot\frac{\pi}{2(1-\tan\pi t)}\right\}\\
&= 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{\pi}{2(1-0)}\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．