関数 $f(x)$ は連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての実数 x に対して $f''(x)$ の値が正であるとする．

(1) 異なる 2 つの実数 $x,\ y$ に対して，次の関数を考える．

$$p(t)=(1-t)f(x)+tf(y)-f((1-t)x+ty) \quad (t \text{ は実数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

このとき

$$p'(0)>0, \quad p'(1)<0$$

が成り立つことを示せ．

(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して，①で与えた関数 $p(t)$ の値が正であることを示せ．

(3) $a<b<c<d$ を満たす実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(d-a)+f(c-b)>f(d-b)+f(c-a)$$

(19 東北大 後 理 4)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) $$p(t)=(1-t)f(x)+tf(y)-f((1-t)x+ty) \qquad \cdots\cdots ①$$

① を t で微分すると

$$\begin{aligned}p'(t)&=-f(x)+f(y)-f'((1-t)x+ty)(-x+y)\\&=(y-x)\left\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-f'((1-t)x+ty)\right\} \quad (\because\ x \fallingdotseq y)\end{aligned}$$

平均値の定理より

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(u)$$

を満たす u が x と y の間に存在し，① は

$$p'(t)=(y-x)\{f'(u)-f'((1-t)x+ty)\} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．これより

$$\begin{aligned}p'(0)&=(y-x)(f'(u)-f'(x))\\p'(1)&=(y-x)(f'(u)-f'(y))\end{aligned}$$

である．ここで，$f''(x)>0$ より $f'(x)$ は増加関数であるから

$x<u<y$ のとき，$f'(x)<f'(u)<f'(y)$
$y<u<x$ のとき，$f'(y)<f'(u)<f'(x)$

であり，いずれの場合も

$$p'(0) > 0, \quad p'(1) < 0 \qquad \cdots\cdots ③ \qquad\qquad \cdots\cdots(証明終わり)$$

である．

(2) ② を t で微分する．

$$\begin{aligned} p''(t) &= (y-x)\{-f''((1-t)x+ty)\}(-x+y) \\ &= -(y-x)^2 f''((1-t)x+ty) \\ &< 0 \quad (\because\ x \fallingdotseq y,\ f''(x) > 0) \end{aligned}$$

$p'(t)$ は減少関数であり，③ でもあるから

$$p'(\alpha) = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

を満たす α がただ 1 つ存在する．

このとき，$p(t)$ の増減は右表のようになるから

t	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$p'(t)$		$+$	0	$-$	
$p(t)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$$p(t) > 0 \quad (0 < t < 1) \qquad\qquad \cdots\cdots(証明終わり)$$

である．

(3) $a < b < c < d$ のとき

$$f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$$

を示す．(2) より，$0 < t < 1$ のとき

$$(1-t)f(x) + tf(y) > f((1-t)x+ty)$$

が成り立つ．$x = d-a,\ y = c-b$ とおき

$$\begin{aligned} &(1-t)x + ty = d-b, \\ &(1-s)x + sy = c-a \end{aligned}$$

を満たす $t,\ s$ を求めると

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-d+b}{x-y} = \frac{b-a}{d-a+b-c}, \\ s &= \frac{x-c+a}{x-y} = \frac{d-c}{d-a+b-c} \end{aligned}$$

であり

$$0 < t < 1, \quad 0 < s < 1$$

を満たす．したがって，この $t,\ s$ に対して

$$\begin{aligned} &(1-t)f(d-a) + tf(c-b) > f(d-b), \\ &(1-s)f(d-a) + sf(c-b) > f(c-a) \end{aligned}$$

が成り立つ．辺々加えると

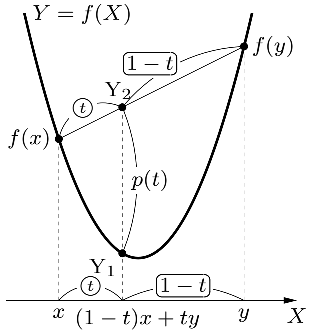
$$(2-t-s)f(d-a) + (t+s)f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$$

である．ここで

$$t + s = \frac{b-a}{d-a+b-c} + \frac{d-c}{d-a+b-c} = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} &(2-1)f(d-a) + 1f(c-b) > f(d-b) + f(c-a) \\ \therefore\quad & f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(証明終わり)$$



- すべての実数 X に対して $F''(X)>0$，すなわち $Y=f(X)$ のグラフが下に凸であることに注意する．

　2 点 Y_1，Y_2 を

$$\mathrm{Y}_1:((1-t)x+ty,\ f((1-t)x+ty)),$$
$$\mathrm{Y}_2:((1-t)x+ty,\ (1-t)f(x)+tf(y))$$

とおくと，$p(t)$ は右図の線分 $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2$ の長さを表しており，(Y_2の y 座標) $>$ (Y_1の y 座標) から，(2) の不等式

$$p(t)>0\ (0<t<1)$$

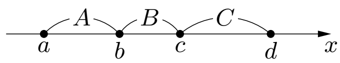
が成り立つ．

　また，$p(t)$ は，$t=0,\ 1$ において $p(0)=0$ から増加の状態，$p(1)=0$ にむかって減少の状態にあるから，(1) の不等式

$$p'(0)>0 \quad p'(1)<0$$

が成り立つ．

　(3) の不等式についても図形的に考えてみる．



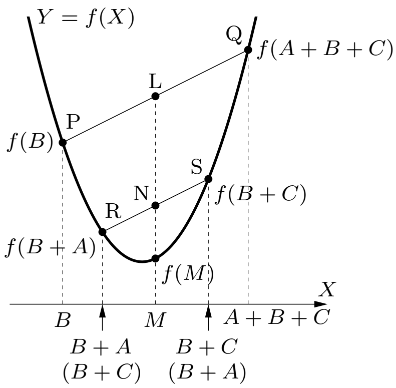
　$a<b<c<d$ より

$$A=b-c,\ B=c-b,\ C=d-c$$

とおくと，$A>0,\ B>0,\ C>0$ であり，(3) の不等式は

$$f(A+B+C)\ +f(B)>f(B+C)+f(A+B) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

と言い換えることができる．



　$B+C$ と $B+A$ (大小関係は決まらない) はいずれも，$B<x<B+A+C$ の範囲にあり

$$\frac{(A+B+C)+B}{2}=\frac{(B+C)+(A+B)}{2}$$
$$(=M\ とおく)$$

となることに注意する．図のように点P，Q，R，S をとり，PQ，RS の中点を E，F とする．曲線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，線分 RS は線分 PQ の下側にあり

$$(N\ の\ y\ 座標)<(L\ の\ y\ 座標)$$

である．したがって

$$\frac{f(A+B+C)+f(B)}{2}>\frac{f(B+C)+f(A+B)}{2}$$

が成り立ち，㋐ が成立する．