次の不定積分，定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{(5^x-1)^2}{5^x}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

(19 広島市大 情報科学 1(2))

【答】

(i) $\dfrac{5^x}{\log 5}-\dfrac{5^{-x}}{\log 5}-2x+C$ (C は積分定数)

(ii) $\dfrac{14}{15}$

【解答】

(i) 分子を展開し積分を実行する．

$$\int \frac{(5^x-1)^2}{5^x}\,dx = \int (5^x+5^{-x}-2)\,dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{5^x}{\log 5}-\frac{5^{-x}}{\log 5}-2x+C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) $\sqrt{2-x}=t$ とおくと

$$2-x=t^2 \qquad \therefore \quad x=2-t^2$$

であり

$$dx=-2t\,dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & 2 \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

である．これにより

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx &= \int_1^0 (2-t^2)t\cdot(-2t)\,dt \\ &= 2\int_0^1 (2t^2-t^4)\,dt \\ &= 2\left[2\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{14}{15}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 次のように解いてもよい.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx &= \int_1^2 (x-2+2)\sqrt{2-x}\,dx \\
&= \int_1^2 \left\{2\sqrt{2-x}-(2-x)\sqrt{2-x}\right\}\,dx \\
&= \left[2\cdot\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}(-1)-\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}(-1)\right]_1^2 \\
&= \frac{4}{3}-\frac{2}{5} \\
&= \frac{14}{15}
\end{aligned}$$