以下の問いに答えなさい．

(1) $t=\tan x$ と置換することで，不定積分

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$$

を求めなさい．

(2) n を自然数とするとき，関数 $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ の導関数を求めなさい．

(3) n を 3 以上の自然数とするとき，

$$\int \frac{dx}{\sin^n x\cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x\cos x}$$

が成り立つことを証明しなさい．

(4) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$$

の値を求めなさい．

(19 横浜市大 医 4)

【答】

(1) $\log|\tan x| + C$ 　(C は積分定数)

(2) $\dfrac{n-1}{\sin^{n-1} x} - \dfrac{n}{\sin^{n+1} x}$

(3) 略

(4) $\dfrac{4}{3} + \log 3$

【解答】

(1) $t=\tan x$ と置換すると $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$ であり

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C$$

$$= \boldsymbol{\log|\tan x| + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{ は積分定数)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) n は自然数より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos x}{\sin^n x}\right)' &= \frac{-\sin x\cdot\sin^n x - \cos x\cdot n\sin^{n-1} x\cdot\cos x}{\sin^{2n} x}\\ &= -\frac{1}{\sin^{n-1} x} - \frac{n\cos^2 x}{\sin^{n+1} x}\\ &= -\frac{1}{\sin^{n-1} x} - \frac{n(1-\sin^2 x)}{\sin^{n+1} x}\\ &= \boldsymbol{\frac{n-1}{\sin^{n-1} x} - \frac{n}{\sin^{n+1} x}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3) $$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

を示すためには

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} - \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} - \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x} \\
=&\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x \cos x}\, dx \\
=&\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx \\
=&\int (\sin x)^{-n} (\sin x)' dx \\
=&\frac{(\sin x)^{-n+1}}{-n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
=&-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + C
\end{aligned}$$

よって，示された． ……(証明終わり)

- $$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^n x \cos x}\, dx \\
&= \int \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}\, dx \\
&= \int \frac{(\sin x)'}{\sin^n x}\, dx + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x} \\
&= -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}
\end{aligned}$$

- (2) の利用を考えて，$\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ をつくり出す．$I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x}$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\cos x}{\sin^n x \cos^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{\cos x}{\sin^n x} (\tan x)'\, dx \\
&= \frac{\cos x}{\sin^n x} \cdot \tan x - \int \left(\frac{\cos x}{\sin^n x}\right)' \tan x\, dx \\
&= \frac{1}{\sin^{n-1} x} - \int \left(\frac{n-1}{\sin^{n-1} x} - \frac{n}{\sin^{n+1} x}\right) \tan x\, dx \quad (\because\ (2)) \\
&= \frac{1}{\sin^{n-1} x} - ((n-1)I_{n-2} - nI_n)
\end{aligned}$$

整理すると

$$(n-1)I_n = -\frac{1}{\sin^{n-1} x} + (n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + I_{n-2}$$
$$= -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

(4) (1)，(3) を用いる．

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$
$$= \left[-\frac{1}{2\sin^2 x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos x} \quad (\because\ (3))$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} + \Big[\log|\tan x| \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \quad (\because\ (1))$$
$$= -\frac{2}{3} + 2 + \log\sqrt{3} - \log\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3} + \log 3}$$

……(答)