

$$f(x) = \frac{5x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} \text{ とする.}$$

$$f(x) = \frac{\boxed{7}}{x} + \frac{\boxed{8}x}{x^2 + 1}$$

であり,

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{\boxed{9}}{\boxed{10}} \log 5 + \frac{\boxed{11}}{\boxed{12}} \log 2.$$

(19 関東学院大 理工 7(2))

【答】	7	8	9	10	11	12
	2	3	3	2	1	2

【解答】

$a, b, c$  を定数とし

$$\frac{5x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

とおくと (設問の形式から  $\frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2 + 1}$  とおいてもよいのだが, 解法に一般性をもたせた)

$$(\text{右辺}) = \frac{a(x^2 + 1) + x(bx + c)}{x(x^2 + 1)} = \frac{(a + b)x^2 + cx + a}{x(x^2 + 1)}$$

であり, 両辺の分子を比較すると

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ c = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3x}{x^2 + 1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

これより

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left( \frac{2}{x} + \frac{3x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \right\} dx \\ &= \left[ 2 \log |x| + \frac{3}{2} \log(x^2 + 1) \right]_1^2 \\ &= 2 \log 2 + \frac{3}{2} (\log 5 - \log 2) \\ &= \frac{3}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log 2 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$