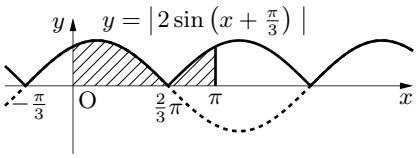
定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x+\sqrt{3}\cos x|\,dx$ を求めよ．

(19 電気通信大 後 1 [I] (2))

【答】 4

【解答】

合成して変数をまとめると



$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} |\sin x+\sqrt{3}\cos x|\,dx\\
=&\int_0^{\pi} \left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right| dx\\
=&2\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx\\
=&2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\\
=&2\left(1+\frac{1}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}+1\right)\\
=&\mathbf{4}
\end{aligned}$$

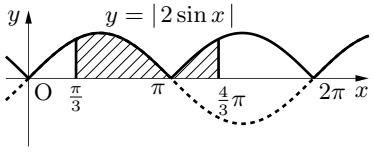
……(答)

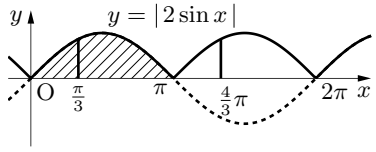
- $y=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ を x 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ 平行移動すると，求める積分は

$$(\text{与式})=\int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}|2\sin x|\,dx$$

である $\left(\text{これは } t=x+\frac{\pi}{3} \text{ と置換積分することと同じである}\right)$.

$|\sin x|$ の周期は π であるから





$$(\text{与式})=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2(1+1)=4$$