自然数 n に対し，定積分 $\displaystyle\int_1^e x^n \log x\,dx$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(19 高知工科大 1(8))

【答】 $\dfrac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$

【解答】

部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned}\int_1^e x^n \log x\,dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{x^n}{n+1}\,dx \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)e^{n+1}-(e^{n+1}-1)}{(n+1)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$