次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

(4) 不等式 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ が成り立つことを示し，それを用いて $3.14 < \pi < 3.15$ を示せ．

(19 埼玉大 後 理・工 4)

【答】

(1) $\dfrac{1}{630}$

(2) $\dfrac{\pi}{4}$

(3) $\dfrac{22}{7} - \pi$

(4) 略

【解答】

(1) 被積分関数を展開すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx &= \int_0^1 x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)\,dx\\ &= \left[\frac{x^5}{5} - 4\cdot\frac{x^6}{6} + 6\cdot\frac{x^7}{7} - 4\cdot\frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9}\\ &= \frac{368}{5\cdot 7\cdot 3^2} - \frac{7}{2\cdot 3} = \frac{736-735}{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{630}}\end{aligned}$$

……(答)

- 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx &= \left[\frac{x^5}{5}(1-x)^4\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5}\cdot 4(1-x)^3(-1)\,dx\\ &= \frac{4}{5}\left[\frac{x^6}{6}(1-x)^3\right]_0^1 - \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{x^6}{6}\cdot 3(1-x)^2(-1)\,dx\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\left[\frac{x^7}{7}(1-x)^2\right]_0^1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\int_0^1 \frac{x^7}{7}\cdot 2(1-x)(-1)\,dx\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\left[\frac{x^8}{8}\cdot(1-x)\right]_0^1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\int_0^1 \frac{x^8}{8}\cdot(-1)\,dx\\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{630}\end{aligned}$$

- $I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ として，部分積分法を用いると

$$I(m,\ n)=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}(-1)\,dx$$
$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

であるから，繰り返し用いると

$$I(4,\ 4)=\frac{4}{5}I(5,\ 3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}I(6,\ 2)$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}I(7,\ 1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}I(8,\ 0)$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1=\frac{1}{630}$$

- $m,\ n$ を 0 以上の整数とするとき

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

として一般化される（ベータ関数）．これを (検算用として) 用いると

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx=\frac{4!4!}{9!}=\frac{1}{630}$$

(2) $x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\qquad\begin{array}{c|ccc}x & 0 & \longrightarrow & 1\\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{4}\end{array}$$

であるから

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $$\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1}\,dx$$

被積分関数の分子を分母で割ると

$$x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4=(x^2+1)(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)-4$$

であるから

$$\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^7}{7}-4\cdot\frac{x^6}{6}+5\cdot\frac{x^5}{5}-4\cdot\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1-4\cdot\frac{\pi}{4}\quad(\because\ (2))$$
$$=\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4\right)-\pi$$
$$=\boldsymbol{\frac{22}{7}-\pi}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $1 \leqq 1+x^2 \leqq 2$ だから

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$$

$x^4(1-x)^4 \geqq 0$ だから

$$\frac{1}{2}x^4(1-x)^4 \leqq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leqq x^4(1-x)^4$$

よって

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx \leqq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx \quad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

これと (1)，(3) より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{630} \leqq \frac{22}{7}-\pi \leqq \frac{1}{630}$$

したがって

$$\frac{22}{7}-\frac{1}{630} \leqq \pi \leqq \frac{22}{7}-\frac{1}{1260}$$

ここで

$$\frac{22}{7}-\frac{1}{630}=\frac{22\cdot 90-1}{630}=\frac{1979}{630}=3.141\cdots>3.14$$

$$\frac{22}{7}-\frac{1}{1260}=\frac{22\cdot 90\cdot 2-1}{1260}=\frac{3959}{1260}=3.142\cdots<3.15$$

よって，$3.14<\pi<3.15$ である．　$\cdots\cdots (\text{証明終わり})$