関数 $f(x)=x+2\cos x$，および曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $C_0: y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形をかけ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．ただし，$0\leqq a\leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) (1) で定めた曲線 C_0 と (2) で定めた接線 ℓ，および 2 直線 $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ．

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めよ．

(19 宇都宮大 工・地域デ・農 5)

【答】

(1) 略

(2) $y=(1-2\sin a)x+2a\sin a+2\cos a$

(3) $S=\pi\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin a+\pi\cos a-2$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi-2$

【解答】

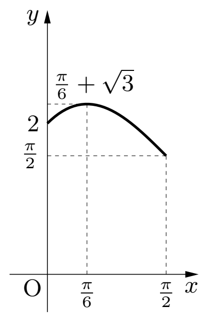
$$C: y=f(x)=x+2\cos x$$

(1) $$f'(x)=1-2\sin x$$

$0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $y=f(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

極大値：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$



よって，曲線 $C_0: y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形は右図となる．

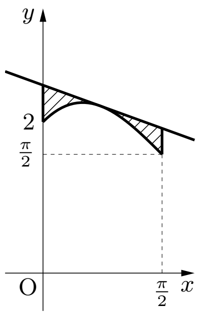
(2) C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=(1-2\sin a)(x-a)+a+2\cos a$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=(1-2\sin a)x+2a\sin a+2\cos a} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 曲線 C_0 と接線 ℓ および 2 直線 $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形は右図の斜線部分である．接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とおくと，図形の面積 S は



$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left\{g(0)+g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cdot\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left\{2a\sin a+2\cos a+\frac{\pi}{2}(1-2\sin a)+2a\sin a+2\cos a\right\} \\
&\qquad -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2\cos x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left\{(4a-\pi)\sin a+4\cos a+\frac{\pi}{2}\right\}-\left[\frac{x^2}{2}+2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left\{\pi\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\sin a+\pi\cos a+\frac{\pi^2}{8}\right\}-\left(\frac{\pi^2}{8}+2\right) \\
&= \boldsymbol{\pi\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\sin a+\pi\cos a-2}
\end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) S を微分すると

$$\begin{aligned}
S' &= \pi\left\{1\cdot\sin a+\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\cos a\right\}-\pi\sin a \\
&= \pi\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\cos a
\end{aligned}$$

$0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $S0$ の増減は下表となる．

a	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		$-$	0	$+$	
S'		↘		↗	

よって，S は $a=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\text{最小値}:\pi\cdot 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-2}$$

……(答)

をとる．