$k,\ n$ を正の整数とする．整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ と整数 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k$ を並べた次のような表を考える．

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k-1}	a_k
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{k-1}	b_k

以下の条件 (i)，(ii)，(iii) を同時に満たすようなすべての表の個数を $A_{n,\,k}$ とする．

(i) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_k \leqq n$
(ii) $1 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_k \leqq n$
(iii) $a_i < b_i$ と $a_j > b_j$ を満たすような $i,\ j$ が存在する．

以下の問いに答えよ．

(1) $A_{n,\,2}$ を求めよ．
(2) $A_{n,\,k}$ が偶数であることを示せ．
(3) $A_{3,\,3}$ を求めよ．

(19 東北大 後 経 4)

【答】

(1) $A_{n,\,2} = \dfrac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n+1)$
(2) 略
(3) $A_{3.\,3} = 10$

【解答】

(1) $k=2$ のとき，条件 (i)〜(iii) は

(i) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq n$
(ii) $1 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq n$
(iii) 「$a_1 < b_1$ と $a_2 > b_2$」または「$a_2 < b_2$ と $a_1 > b_1$」 を満たす

であり，言い換えると

(ア) $1 \leqq a_1 < b_1 = b_2 < a_2 \leqq n$
(イ) $1 \leqq a_1 < b_1 < b_2 < a_2 \leqq n$
(ウ) $1 \leqq b_1 < a_1 = a_2 < b_2 \leqq n$
(エ) $1 \leqq b_1 < a_1 < a_2 < b_2 \leqq n$

の 4 つの場合がある．

(ア) では，$a_1,\ b_1(=b_2),\ a_2$ は異なる 3 数であり，(ウ) では，$b_1,\ a_1(=a_2),\ b_2$ は異なる 3 数である．また，(イ) では，$a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_2$ は異なる 4 数であり，(エ) では，$b_1,\ a_1,\ a_2,\ b_2$ は異なる 4 数であることに注意する．

$n=1,\ 2$ のとき，条件を満たす表をつくることはできないから

$$A_{n,\,2} = 0$$

$n=3$ のとき，条件を満たす表ができるのは (ア) または (ウ) のときであり，どちらも $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ は 1 通りに決まる．

$$A_{n,\,2} = 1 + 1 = 2$$

$n \geqq 4$ のとき，条件を満たす表の個数は (ア)，(ウ) の場合は n 個の数から 3 個の数を選ぶ組合せの数と同じであり，(イ)，(エ) の場合は n 個の数から 4 個の数を選ぶ組合せの数と同じである．

$$\begin{aligned} A_{n,\,2} &= {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_4 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_4 \\ &= \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right\} \times 2 \\ &= \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n+1) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① は $n = 1,\ 2,\ 3$ のときも成り立つ．

よって　　$\boldsymbol{A_{n,\,2} = \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n+1)}$　　……(答)

(2) (1) と同じように，条件 (ⅰ)，(ii) のもとで (iii) は

(ア) $1 \leqq a_i < b_i = b_j < a_j \leqq n$
(イ) $1 \leqq a_i < b_i < b_j < a_j \leqq n$
(ウ) $1 \leqq b_i < a_i = a_j < b_j \leqq n$
(エ) $1 \leqq b_i < a_i < a_j < b_j \leqq n$

のいずれかを満たす $i,\ j$ が存在することと言い換えることができる．(ウ) は (ア) の a_i と b_i および a_j と b_j を入れ換えたものであり，(エ) は (イ) の a_i と b_i および a_j と b_j を入れ換えたものである．したがって

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k-1}	a_k
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{k-1}	b_k

が条件 (ⅰ)～(iii) を満たす表ならば，上下を入れ換えた表

b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{k-1}	b_k
a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k-1}	a_k

は上の表とは異なり，条件 (ⅰ)～(iii) を満たす．

すべての表に対し，上下を入れ換えた表の対ができるから，$A_{n,\,k}$ は偶数である．

…… (証明終わり)

(3) $n = 3$ のとき，条件 (ⅰ)，(ii) のもとで (iii) を満たす a_i，b_i，a_j，b_j は

(ア) のとき，

a_i	a_j
b_i	b_j

は

1	3
2	2

(イ) のとき，a_i，b_i，a_j，b_j は存在しない

したがって，$n = 3,\ k = 3$ の表のうち (ア) を満たすものは

1	1	3
1	2	2

1	1	3
2	2	2

1	2	3
2	2	2

1	3	3
2	2	2

1	3	3
2	2	3

これらの上下を入れ換えて，(ウ) を満たす表がつくられるから

$\boldsymbol{A_{3,\,3}} = 5 \times 2 \boldsymbol{= 10}$　　……(答)