$1 \leqq a \leqq b \leqq 100$ を満たす整数 $a,\ b$ の組の個数を求めよ.

(19 愛媛大 教育・農・工 1(3))

【答】 5050

【解答】

$1 \leqq a \leqq b \leqq 100$ を満たす整数 $a,\ b$ は，1 以上 100 以下の 100 種類の整数の中から重複を許して 2 個選び，大きくない方の値を a とし，他方を b とすればよいから，組 $(a,\ b)$ の個数は

$${}_{100}\mathrm{H}_2 = {}_{100+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_{101}\mathrm{C}_2 = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = \mathbf{5050}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ の証明を兼ねた解答をしておく．
  求める個数は，球 2 個と仕切り棒 $100-1=99$ 本の並べ方に対応するから

  $${}_{2+99}\mathrm{C}_2 = {}_{101}\mathrm{C}_2 = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = 5050\ (\text{個})$$

- $1 \leqq a = b \leqq 100$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ の個数は

  $$100\ (\text{個})$$

  $1 \leqq a < b \leqq 100$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ の個数は

  $${}_{100}\mathrm{C}_2 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950\ (\text{個})$$

  であり，求める個数は

  $$100 + 4950 = 5050\ (\text{個})$$

- a を $a = k\ (1 \leqq k \leqq 100)$ と固定すると，b は $k \leqq b \leqq 100$ より

  $$100 - (k-1) = 101 - k\ (\text{個})$$

  存在するから，組 $(a,\ b)$ の個数は

  $$\sum_{k=1}^{100} (101-k) = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050\ (\text{個})$$