n を自然数とし，p を $0<p<1$ を満たす実数とする．一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある．最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある．表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) P_n を p および n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ とする．n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている．このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ．

(19 広島大 文系 2)

【答】

(1) $P_n = \dfrac{1}{2}(2p-1)^n + \dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{n(n-1)(1-p)^2p^{n-2}}{(2p-1)^n+1-2p^n}$

【解答】

(1) 最初，カードは 0 と書かれた面が上になるように置いてあるから

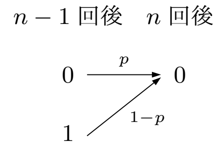
$$P_0 = 1$$

n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 となるのは，次の場合がある．

(i) $n-1$ 回目の試行が終わったときにカードの数字が 0 かつ n 回目にコインの表が出る

(ii) $n-1$ 回目の試行が終わったときにカードの数字が 1 かつ n 回目にコインの裏が出る

(i) と (ii) は排反であるから



$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1}\ .\ p + (1-P_{n-1})\cdot(1-p) \\ &= (2p-1)P_{n-1} + (1-p) \end{aligned}$$

この式は次のように変形される．

$$P_n - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$\left\{P_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $P_0 - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公比 $2p-1$ の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}} \quad (n \geqq 0)$$ ……(答)

(2) n 回の試行後にカードの上の面の数字が 0 であり，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されるという事象を A，途中でカードがちょうど 2 回裏返されるという事象を B とすると，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．$n \geqq 2$ で，n 回目にカードの数字が 0 であり，途中一度もカードが裏返っていないときの確率は p^n であるから

$$\begin{aligned} P(A) &= P_n - p^n \\ &= \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} - p^n \\ &= \frac{1}{2}\{(2p-1)^n + 1 - 2p^n\} \end{aligned}$$

$P(A \cap B)$ は，n 回の試行のうち，ちょうど 2 回カードが裏返されたときの確率であるから

$$P(A \cap B) = {}_n\mathrm{C}_2(1-p)^2p^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}(1-p)^2p^{n-2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{{}_n\mathrm{C}_2(1-p)^2p^{n-2}}{P_n - p^n} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(1-p)^2p^{n-2}}{(2p-1)^n + 1 - 2p^n}} \qquad \cdots\cdots(答)$$